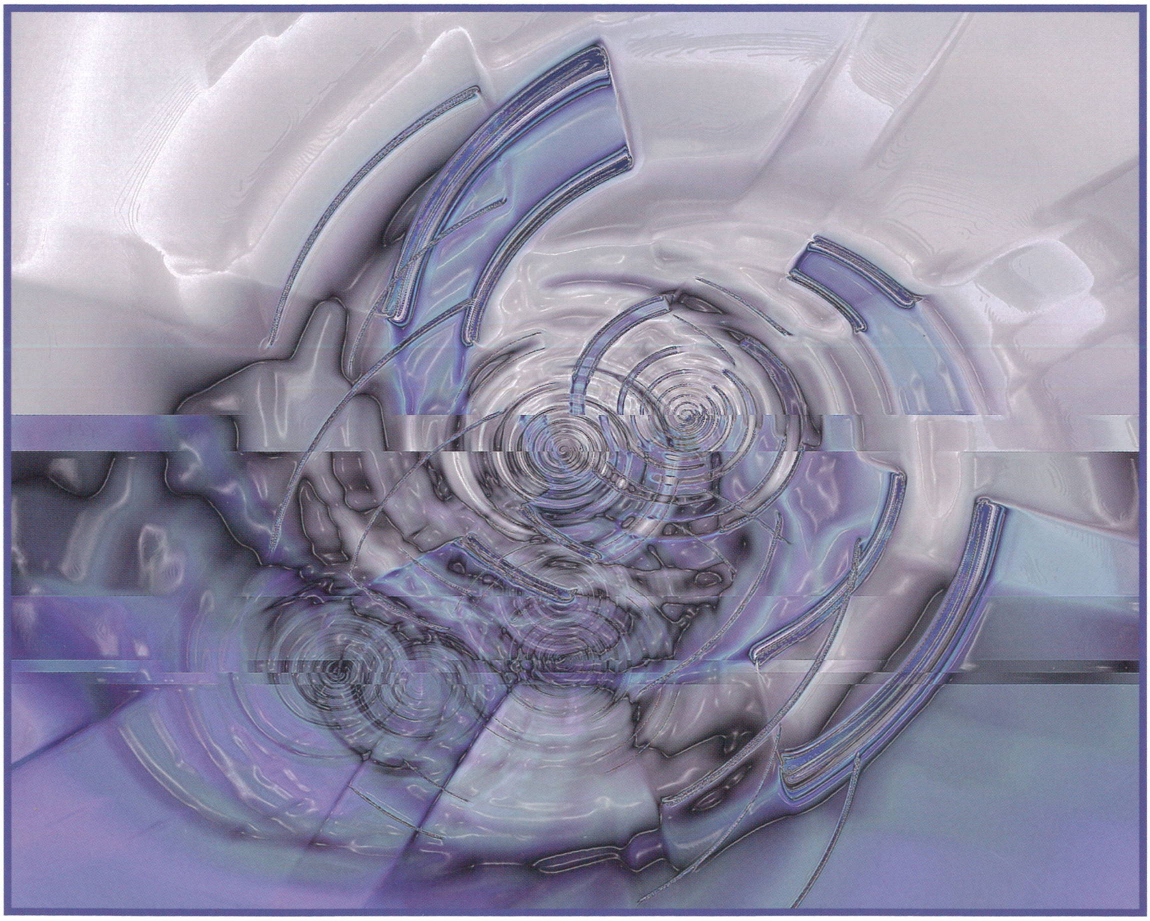
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年5月1日発行　第51巻5号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

5
2013

特集　次元の作法
物理を表現する心得



No.599
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 599 May 2013

次元の作法

物理を表現する心得

表紙：戸川 隼人

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/11 省略
2009年/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想

数理科学臨時別冊一覧

12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート
13年/4 無限量子系の物理と数理

May 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 599

特集／次元の作法

巻頭言

次元とは何か

米谷 民明

人間社会には誰でもが従うべき「作法」というものがある．異なった個性を持ち，様々な違った経験，環境，言語，習慣の中で育ってきた個々の人間が共通の土俵の上で協力し，競い合い，助け合える社会が成り立ち機能しているのも，人間がこれまで培ってきた最低限の共通の作法を通じてである．学問にも当然そのような作法とでも呼ぶべきものがある．本特集で取り上げる「次元」には，自然科学とくに物理学における一種の作法という側面が確かにある．日常生活でも比較できないものを「次元が違う」という言い方をよくする．物理学の次元も，これを精密にしたものである．一般的な立場から「次元とは何なのか」について考えてみよう．

物理的次元と幾何学的次元

ここで言う「次元」は，空間の（**幾何学的**）**次元**ではなく，物理量の「**物理的次元**」のことである（数学の観点からの次元については，本特集の加藤氏の解説を参照のこと）．同じ用語を用いるが，この2つの次元は概念的には違う．しかし，空間の次元と物理的次元の間には密接な関係にある．例えば，空間に任意の形をした広がった物体があるとしたとき，もし物体全体を一様に a 倍に引き伸ばしたならば，その体積は a^3 倍になる．ここに現れた冪の3は空間の次元数に等しい．もし空間の次元が私たちが生きている3次元ではなく，d 次元ならその体積は全体の引き伸ばしにより，もとの体積の a^d 倍になる．この例に現れた次元は「長さ」あるいは「距離」の次元だ．つまり，体積という物理量は，長さに関して空間の幾何学的次元 d に等しい物理的次元を持つ．これを [体積の次元$=\mathrm{L}^d$] と表すことが慣習（文字通り物理の作法の１つで，高校物理でも取り上げられるべきもの）になっている．以後，ローマン活字で次元を表す．普通の物理量や自然定数など数値を代入できるものは，通常のようにイタリックのローマ字で表すので注意してほしい．

体積の次元については次のような表現も可能だ．今考えている体積を，それと相似な形で長さのスケールが $1/a$ に縮まった微小体積の細胞を埋め込み合成し，もとの体積全体を覆うとしよう．そのとき必要最低限の細胞の個数 $N(a)$ が $a\to\infty$ で $N(a)\sim a^d$ と振る舞うならば，もとの体積が占める空間の次元は d である．これをもって任意の形の幾何学的対象物の幾何学的次元の定義として採用することもできる．通常の幾何学では分類できないような複雑な対象に対して用いられる**フラクタル次元**は，基本的にこれと同じ考え方に基づく．

単位と次元

以後，物理的次元のことを単に次元と呼ぼう．ここでは日常用語から出発したので，長さを「引き伸ばす」と表現したが，物理的次元を考える際に

は，実際に力を加えて引き伸ばすという物理的操作を意味しているのではない．長さの単位の変更によっても同じことが起こる．長さを数値で表すには長さの基準としての単位を定めなくてはならない．単位とは，言い換えれば，長さを測るものさしの目盛りの振り方である．もし目盛りの振り方を $1/a$ に縮めるなら物理的に全く同じ長さでも，数値で表せば a 倍になる．従って，体積は a^d 倍になる．測定基準を短縮すれば，その基準から見れば，もとに比べて引き伸ばしたのと同じだ．次元は単位の変更によって起こる数値の変化に現れる冪と言ってよい．

一般にこのような単位の変更による次元の定義は，あらゆる物理量に適用できる基本的な性質である．私たちは，時間と空間の中で生きているから，空間における距離と並ぶもう 1 つの基本的次元は，時間の長さに関する次元である．任意の物理量の値が，時間の単位目盛りを $1/a$ 倍だけ変更したときに a^α 倍になるなら，その物理量の時間に関する次元は T^α（時間そのものでは $\alpha = 1$）だ．物体の速度は運動距離と時間の比で定義されるから，時間次元は T^{-1}，空間次元は L^1 である．

このように定義するなら，物理量にはすべて個々に次元が存在できることになる．電荷，電流，電気抵抗，粘性抵抗，熱量，温度，圧力，放射線量，... と，ありとあらゆる物理量ごとに単位を勝手に定めることができ，それにより次元が定義できる．しかし，もし次元が物理量ごとにすべて異なり，互いの間で関係をつけることができないとすると，次元は単なる個別ごとの約束だけの意味しかないもので，それ以上の役には立たない．次元が役立つのは，異なる物理量の次元の間に関係をつけることができるからである．

距離（L: 単位 = **メートル** m），時間（T: 単位 = **秒** s）と並んで 3 番目の基本的次元として用いられる質量（M: 単位 = **キログラム** kg）を考えてみよう．質量の基準は，長さと時間の基準 = 単位を決めただけでは定まらない．現在は kg 原器と呼ばれる特定の物体により，質量単位を定めている．はたして，この 3 種で単位および次元として十分であろうか．異なる物理量の次元をどこまでどう関係づけられるかで，独立な次元の数が決まる．例えば，熱量については，熱力学の法則により，熱と仕事の相互変換が可能であるために，仕事あるいはエネルギーという力学的物理量の次元に帰着する．温度も物質を構成する分子の平均エネルギーと関係することによって**力学的次元**に帰着する．電荷（および電流）の次元も，結局は電荷あるいは電流間に働く力の強さによって定義できるから，やはり力学的次元に帰着できる*1)．これから分かるように，次元が L, T, M の 3 種で十分なのは，物理量の測定が最終的にはいつも力学的測定に帰着できるからである．言い換えれば，すべての物理現象は，**力 = 相互作用**によって起こるためである．測定も何らかの意味での力なしには行い得ない．質量が基本次元として必要なのは，元をたどると質量と加速度の積が力であるという**ニュートンの運動方程式**にあるわけである．

ニュートン力学が，相対性理論と量子論によって変更を受けた後でも，両者の特別な場合としてニュートン力学が包含されているのであるから，次元が 3 種に帰着できることは変わらない．物理学のあらゆる分野においていわゆる「**次元解析**」が，現象の本質を大づかみに捉えたり，現象を特徴づける無次元のパラメーターを取り出すなどの場面で，役立つ理由もそこにある．ニュートン自身，次元解析の考え方を具体的に用いている．『プリンキピア』にも時間や空間の引き伸ばしに基づいて運動の相似性が論じる節がある（『自然哲学の数学的原理』，1687 年，Book II, Section VII Proposition XXXII）．一方，力学的次元に関して次元がゼロの物理量は，単位の変更によっては変化しない数値を持つ量という意味で，絶対的な意味を持つことになる．これら両方の意味での様々な例が本特集号の記事（原田氏，仲氏，早田氏，森川氏，仁尾氏の解説参照）で，それぞれの執筆者の観点か

*1) 古くは MKSA 単位系と呼ばれる単位系の拡張である国際単位系 SI では，L, T, M に加えて，電流の単位（I: アンペア，$\mathrm{A{=}L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}}$）を加えて基本単位として採用している．これは次元に整数ではない冪が現れる煩雑さを避けるために便宜的に導入されているものと看做すべきである．

ら詳しく論じられているので，ここではその具体例に触れる必要はないだろう．

自然定数と次元

物理法則が深まるにつれ，この3種の次元の間にも普遍的な関係をつけることが可能になった．LとTについては，相対性理論により**光速度** c が慣性系によらない基本定数として確立したことにより，

$$\mathrm{L} = c\mathrm{T} \tag{1}$$

を通し時間単位と距離単位は互換できる．現に**国際単位系 SI**（単位系の歴史や国際単位系に関する現在の動向については，高田氏，藤井賢一氏の解説参照）では，長さの単位を [真空中で光が1秒間に進む距離] と定義している．さらに，量子論を特徴づける基本定数としての**プランク定数** h（作用の次元$=\mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-1}$）の役割が確立されたことにより，質量次元と長さ次元が互換になる．

$$\mathrm{M} = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}h = \frac{h}{c}\mathrm{L}^{-1} = \frac{h}{c^2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{2}$$

素粒子論で普通に用いられる [**自然単位**] はこれに基づき，時間と作用の単位を $c=1, h=1$ であるように定めて，すべての物理量を長さ次元だけで表すことにしたものである．もう1つの基本定数である**重力定数** G（次元 $\mathrm{L}^3\ \mathrm{T}^{-2}\ \mathrm{M}^{-1}$）を用いれば

$$\mathrm{L}\left(\sqrt{\frac{Gh}{c^3}}\right)^{-1} = 1 \tag{3}$$

により，長さの次元（および，(1), (2) により他の2つの次元も）を無次元化することが可能になる．後の解説の多くで触れられている**プランク単位**がこれである．つまり，プランク単位によれば，自然界のすべての物理量は無次元の数値になる．プランクは，息子と散歩中に『今日私はニュートンの発見と同じくらい重要な発見をした』と語ったとのことであるが，彼の念頭にあったのは，まさにこのような普遍的単位の存在に気がついたことだった．実際，彼はプランク公式の発表前に出版した論文「非可逆な輻射現象について」の中で最後の1節を割いてその意義を強調している．『この単位は，特殊な物体や物質に関係なく，その意味をすべての時代，またすべての脱世間的，脱人間的な文化に対して当然保持し，従って“自然単位”と呼んでよいものである．』*2)

ついでに述べておくと，現在**ボルツマン定数**と呼ばれる絶対温度Kとエネルギーの換算定数 k（すなわち，エントロピーの次元を持つ定数）を発見したのもプランクである．ウィーンの中央墓地のボルツマンの記念碑に彫られているボルツマンの原理を表す式 $S = k\log W$ の係数がそれである．

しかし，現代物理学の観点からは，基本自然定数がプランクが強調したように，「すべての時代」で常に変わらない意味を持つのかどうかは，実はそれほど単純ではない．なぜなら，自然定数の定義の問題とも絡むが，自然定数が宇宙のいつでもどこでも絶対的に同じであるという保証はないからだ．ディラックは宇宙を特徴づけるいくつかの「大数」間の関係に着目し，それらが宇宙の年齢とともに変化して現在の値になったという予想を述べた（1937年）．いまのところ実験的にこの種の予想を裏付ける証拠はないが，このアイデアは多くの物理学者を魅了し研究が続けられている．本特集の藤井保憲氏の解説はこの話題を主題としているし，仲氏の解説にも触れられているので参照していただきたい．例えば，自然界のすべての力の統一理論への理論的手掛かりと看做される（超）弦理論では，重力定数はディラトンと呼ばれるスカラーの場の期待値によって定まる．つまり，時間と場所に依存する場によって決まるべき力学変数の1つなのである．このように，理論が深まるにつれ，自然定数自体も単に与えられたものとしてではなく，より深い原理から統一的に理解できる可能性が高まるわけである．

スケール次元

単位と次元の問題とはいくらか異なった意味での次元について触れておこう．単位の変更による

*2) 物理学古典論文叢書1『熱輻射と量子』（物理学史研究刊行会編，東海大学出版会，1970年）188ページ（辻哲夫訳）．

数値の変化は，単に定義の問題で物理量の実際の時間，空間的距離やエネルギー，運動量に関する依存性とは一見無関係に見えるかも知れない．しかし，単位の変更によってこれらの量の数値は変化するのだから，この依存性と物理量の次元が無関係ということはあり得ない．例えば重力定数の次元が $\mathrm{L}^3\ \mathrm{T}^{-2}\ \mathrm{M}^{-1}$ であることは，ニュートン力学の近似において万有引力の強さが物体間の距離の2乗に反比例 r^{-2} することから導かれることを思い出そう．もし空間の（幾何学）次元が d なら，距離依存性は $r^{-(d-1)}$ である．

$$|\boldsymbol{F}(r)| = \frac{Gm_1m_2}{r^{d-1}}, \qquad (4)$$

$$|\boldsymbol{F}(r')| = \rho^{-(d-1)}|\boldsymbol{F}(r)|, \quad r' = \rho r. \qquad (5)$$

距離の大きさを相似変換（**スケール変換**とも言う）$r \to r' = \rho r$ によって ρ 倍した距離 r' に移ったときの力が $\rho^{-(d-1)}$ 倍だけ大きさが変わる．物理量の単位はそのままで，距離を実際に ρ 倍したときの振舞いを見ているのに注意してほしい．このとき現れる冪 $d-1$ を**スケーリング次元**と呼ぶ．重力定数の次元もこれに対応し $\frac{c^3}{h}\mathrm{L}^{d-1}$ と表せる．プランク単位の長さは $\left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{1/(d-1)}$ である．

このように力の距離依存性が空間次元と関係することは，その源をたどるならミクロな意味での力の起源が粒子の交換によって説明できることによる．d 次元の空間で質量ゼロの粒子の交換によって生じる力の距離依存性は $r^{-(d-1)}$ である．これは粒子を生成消滅させる作用を持つ（量子的）場の自然単位次元が $\mathrm{L}^{-(d-1)/2}$ であることによる．その意味では，スケーリング次元は前節まで議論してきた物理的次元（および幾何学的次元）と直接関係する．しかし，概念的には別物である．量子論と古典論を区別する最も重要な性質の1つは，時空のあらゆる距離のレベルで存在する**量子的「揺らぎ」**の効果が存在することだ．実際の観測量には，この揺らぎの効果は距離のスケールに依存する仕方で効いてくる．量子的揺らぎだけではなく，熱的な揺らぎによっても同様な現象が起こる．そのため，距離のスケール変換の下での場の性質が，その物理的次元とは異なる次元で支配されるという現象が起こり得る．物理的次元から決まる次元とスケーリング次元がずれているとき，そのずれを「異常」次元と呼ぶ．**異常次元**が特に重要な役割を演ずるのは，**相転移**の現象においてである．相転移の起こる**臨界点**近傍では熱的揺らぎが大きく，量子的揺らぎと同様なメカニズムで異常次元が生じるのである．

対称性と自然定数

また，一般に理論がスケール変換で対称性を持つ場合でも，量子的（および熱的）揺らぎの効果によりその対称性が破れることがある．最も典型的な例を1つ挙げると，クォークを束縛して核子（原子核を構成する粒子である，陽子や中性子とその仲間たち）を作り上げる「色の力」を支配する量子色力学（と呼ばれるゲージ理論）の場合だ．量子色力学はクォークの質量がゼロのとき，古典的場の理論としては（大局的な）スケール不変性という対称性があるが，量子論ではこの対称性が量子的揺らぎによって破れる．その結果，古典論では存在しない新たな長さの単位が場の力学の結果として生み出される（**次元変容**という）．この長さ単位が原子核の大きさと質量を決める*3)．

これと似たような意味で，自然界の基本定数を古典的対称性の存在とその（自発的）破れによって理解しようとする考え方も古くから追求されている．量子論の前の段階でも，すでに1918年に一般相対性理論の一般座標変換の対称性を時空の距離スケールの任意変換の下での対称性まで拡張する理論が，数学者のワイルによって提唱されている．彼は一般相対性理論の無限小線要素 $ds(x)^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ に対して，時空座標に任意に依存するスケール変換（**ワイル変換**）

$$ds(x)^2 \to e^{\rho(x)}ds(x)^2$$

を施しても対称性（局所的スケール対称性）を持つ

*3) 原子核の質量を決め通常の物質質量の大部分（99%近く）を生み出すのは，色の力であって，いわゆるヒグス場ではないことに注意．ヒグス場は，電子の質量やクォークの「裸」の質量，およびヒグス粒子自身の質量を与える役割を果たす．

ような理論に拡張しようと試みた．彼はこれから電磁ポテンシャルのゲージ変換と同じ変換が導かれることを根拠に，重力と電磁力の統一理論の原理となると主張した*4)．しかし，この主張が正しいとすると，例えば原子のスペクトル線が原子の過去の運動の軌跡によってすべて異なることになり観測と矛盾するということで，ワイルの理論はアインシュタインによって直ちに退けられた．ワイルの論文は，アインシュタインの「その深さと大胆さは誰にとっても賞賛すべき仮説ではあるが，受け入れられない」というコメント付きで出版されるという異例な発表のされ方をしている．ワイルの考えは，10年ほどを経てから量子力学および量子場の理論が発展して，線要素ではなく荷電粒子の波動関数や量子場の局所位相変換

$$\psi(x) \to e^{ie\theta(x)}\psi(x)$$

の下での対称性という形で，いわば換骨奪胎されて蘇った．つまり，電磁場の**ゲージ対称性**は，長さの局所スケール変換とは無関係であることが明白になったわけである．

基本的な自然定数といえども与えられたものではなく，より根源的な理論から導けるのではないかという考えは確かに魅力的だ．物理学の基礎法則を対称性から理解しようとする立場からは，アインシュタインも認めたように，局所的スケール対称性のアイデアは面白い．そのため，ワイルの理論とは違った意味で局所的スケール対称性を持つ理論を構築しようとする試みは今日まで続いている．その立場では重力定数の存在を最初から仮定することはできず，スケール対称性の自発的破れから理解しなければならない．従って，局所スケール対称性が厳密に成り立つなら，長さには単位が存在できないため，次元も最初は無意味になる．そのような重力理論は共形重力理論と呼ばれる．この種の理論には，もう1つ，一般相対性理論を量子論的に扱うと直ちに遭遇する繰り込み不可能性の困難を解決しようとする動機もある．つまり，重力も取り入れると，量子的揺らぎを考慮すると，プランク長さの領域以下での揺らぎ効果によって物理量が無限大になる困難がある．量子色力学，電弱統一理論などの重力以外の力を扱うゲージ理論では，観測可能な量を観測された質量や相互作用定数など少数の物理量を実験から与える限り，無限大は打ち消される．しかし，一旦重力を取り入れると無限に多くの無限大が現れ，そのような「繰り込み」の操作では打ち消すことができないのである．ワイル対称性があれば無限大の種類は大幅に減るので，繰り込み可能性が実現できると期待できる．しかし，共形重力理論を量子論の基本原理である確率の保存と調和させて定式化することには，誰も成功していない．

このように，上に述べたような意味での（局所的）スケール対称性が自然法則の背後にあるという具体的な証拠は今のところない．また，すでに触れたように，重力とゲージ理論を統一する構造を示し無限大の困難を（全く新しい機構により）解決できる弦理論は，この対称性とは別の意味で重力定数が力学的なメカニズムによって定まる可能性を秘めている．弦理論を支配する原理は未だ解明されていないが，興味深いのは，現時点での弦理論の摂動的構造を支配している対称性は，弦が時空で描く軌跡（世界面）上の2次元の場の力学として，まさにワイル変換の対称性を厳密に実現していることだ．弦理論が内蔵する統一理論らしさの多くは，この2次元ワイル対称性に起源がある．自然定数と次元を力学的に生み出す対称性には共形重力理論とは別の機構が存在していることを強く示唆している．

「次元とは何か」から出発して，あまりに遠くまで来てしまった．ここらで引き返すのが無難だろう．次元とは物理の作法であるとともに，現代物理学の深い未解決の問題とも繋がるということを，読者に感じてもらえば十分である．このことを念頭に各解説を読まれるなら，ますます読者自身の考えを深めるのに役立つものと期待している．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

*4)　この対称性をドイツ語で Eich-Invarianz と名付けたのが，「尺度」不変性を意味するゲージ対称性の語源になった．

次元解析の基本

「物理」をわしづかみする方法



原田　恒司

1. 物理量と次元

試験の採点をしていて残念に思うのは，答えをまったく知らない人が見ても明らかに間違いだとわかる答えを，平然と書いてあるものがかなりあることだ．例えば「○○さんの身長はどれほどですか.」と聞かれて「60 キログラムです.」と答えているようなもの．少し長い文字式の計算をしているうちに計算間違いをして，明らかにおかしな答えを出しているのにそれに気がつかない．誰でも計算間違いはするものだが，物理量が持つ**次元**に気をつけていればこうした間違いを簡単に避けることができる．

次元には基本的なものと，それらから組み立てられたものがある．基本的な次元は**長さ**，**時間**，**質量**である．これらはそれぞれ空間的，時間的な広がりと，物質量という物理的世界の基本的な概念と結びついている．考える現象によっては**電荷**（あるいは**電流**）のような，別の種類の物質量を考えなければならない場合もある．

次元は**単位**よりももっと基本的な概念である．例えば身長を測るのにメートルを使おうがフィートを使おうが，それが長さを表していることは同じである．その長さという性質を言い表したものが次元である．

物理量はそれぞれ決まった次元を持っている．例えば，速さは単位時間当たりどれほどの距離を移動するかを表すので (長さ)/(時間) という次元を持つ．基本的な次元を（長さ）L,（時間）T,（質量）M と記号で表すと，速さの次元は $\mathrm{L/T=LT^{-1}}$ と表される．

次元を持たない量は**無次元量**と呼ばれる．2 とか π のような単なる数は無次元量である．次元を持ついくつかの量を組み合わせて無次元量を作ることもできる．

同じ次元を持つものどうしでなければ，足したり引いたりすることには意味がない．同じ次元を持つものどうしでなければ，その大きさを比べることには意味がない．これは体重と身長を足したり，その大きさを比べられないのと同じことである．

超越関数（指数関数，対数関数，三角関数など）の引数は無次元量でなければならない．例えば $\sin x = x - x^3/6 + \cdots$ という展開で，もし x が次元を持つならば，各項が異なる次元を持つことになってしまう．

物理法則は，物理量の間の等式として表されることが多い．また，新しい概念を定義するときも等式を用いることが多い．そのとき，等式で結ばれるものは同じ次元を持っていなければならない．これを**次元の同次性**という．例えば，ニュートンの運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ では，質量 m が次元 M, 加速度 $\boldsymbol{a}$ が次元 $\mathrm{LT^{-2}}$ を持つので，力 $\boldsymbol{F}$ は次元 $\mathrm{MLT^{-2}}$ を持っている．エネルギーと仕事の次元は，力がする仕事の定義

$$W = \int_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1}$$

から (力) × (長さ) の次元を持つので ML^2T^{-2} となることがわかる．運動エネルギー $mv^2/2$，重力による位置エネルギー mgh など，どれもその式から同じ次元を持っていることを容易に確かめられるだろう．

次元の最も単純で初等的な使い道は，計算をするときに次元に気をつけながら計算をするということである．例えば,「張力を求めなさい」という問題に，$mgl\cos\theta$（ただし m は何かの質量，g は重力加速度，l は何かの長さ，θ はどこかの角度）と答えていたら，どんな問題か，どんな解き方をしたかを聞かなくても間違いだとわかる．なぜならば，この答えの次元はエネルギーの次元であって，力（張力）の次元ではないからだ．

単なる数式の評価でも，次元解析の考え方が役に立つことがある．例として

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} \quad (a > 0) \qquad (2)$$

という積分を考えよう．ここで x が長さの次元 L を持つと考えると，a は L^{-2} という次元を持つことになる．積分自体は L^{n+1} という次元を持つので，$I(a) \propto 1/\sqrt{a^{n+1}}$ となることがわかる．

2. 次元解析で答え（の一部）を求める

ある物理量が，他のどのような物理量によって決まるのかが前もってわかっていると，その物理量にどう依存するのかを決めることができる場合がある．このような考察を**次元解析**と呼ぶ．良く知られた例として，振り子（単振り子）の周期を考えよう．周期を決める要素として，振り子の質量 m，振り子の腕の長さ l，重力加速度 g などが考えられるだろう．周期はこれらの組み合せで与えられるとして，$m^x l^y g^z$ に比例するという関数形を仮定しよう．周期は次元 T を持つので，

$$T = M^x L^y (LT^{-2})^z \qquad (3)$$

が成り立つ．それゆえ，$x = 0, y = 1/2, z = -1/2$ であることがわかる．すなわち，

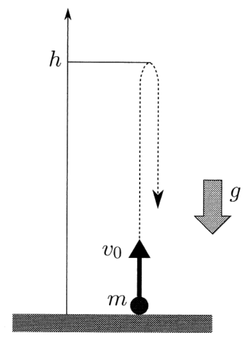


図 1　物体の鉛直投げ上げ．

$$(\text{周期}) = (\text{無次元量}) \times \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

が得られる．振り子の周期は振り子の質量には依存しない．この結果は微小振動に限らずに成立している．

次元解析からは，無次元の比例係数がいくつになるかを知ることはできないが，それでも十分有用な情報が，運動方程式を解くことなく得られていることに注意して欲しい．

いくつか例を挙げてみよう．

(a) 鉛直投げ上げの最高点

質量 m の物体を，初速度 v_0 で鉛直上方に投げ上げるとき，初めの位置から最高点までの距離 h はどう求まるだろうか（図 1 参照）．重力加速度 g に依存することを考慮すると，$h \propto m^x v_0^y g^z$ と仮定できるだろう．両辺の次元を比べると

$$L = M^x (LT^{-1})^y (LT^{-2})^z \qquad (5)$$

となるので，$x = 0$, $y = 2$, $z = -1$ であることがわかる．すなわち，結果は物体の質量には依存せず，

$$h = (\text{無次元量}) \times \frac{v_0^2}{g} \qquad (6)$$

となる．高校物理の最初に計算するのは，この（無次元量）が 1/2 であるということである．

(b) 空が青い理由

どうして空は青いのだろうか．1871 年にレイリーは大気中の微粒子（後にこれは大気の分子であることがわかったのだが）による光の散乱にお

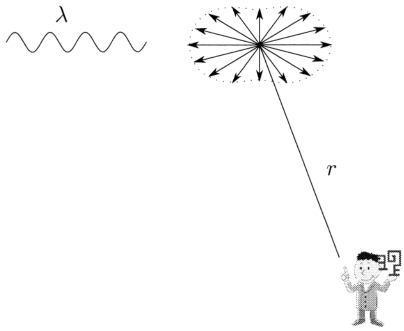


図 2　レイリー散乱.

いて，青い光が赤い光よりも強く散乱されることを示して，空が青く見えることを説明した[1].

散乱される光の振幅は，入射する光の振幅に比例する．その比（無次元量）を考えよう．この比は粒子の半径 d，光の波長 λ，粒子から観測者までの距離 r に依存するだろう（図 2 参照）．その他に，光の速度にも依存するだろうか．d, λ，および r がすべて長さの次元 L しか持たないので，無次元量である比は光の速度には（時間の次元 T を含むので）依存しない．同様に，粒子の質量にも（質量の次元 M を含むので）依存しない．レイリーは，この比が微粒子の体積（$\propto d^3$）に比例するとした．また，散乱光は球面状に広がるので，振幅は距離 r に反比例する．これらから，振幅の比は $d^3/(r\lambda^2)$ に比例しなければならないことがわかる．つまり，散乱される光の強度 I（振幅の 2 乗に比例する）は波長の 4 乗に反比例する．

$$\frac{I_{\text{散乱}}}{I_{\text{入射}}} \propto \frac{d^6}{r^2\lambda^4}. \tag{7}$$

赤い光に比べて波長の短い青い光は何倍も散乱されやすい．

(c) 重力による光の湾曲

太陽のような大きな重力源の近傍を通る光は，その重力場によって「落下」し，進行方向を変える（図 3 参照）．その角度 θ を次元解析から求めてみよう．θ は万有引力定数 G，太陽の質量 $m_\odot$，太陽の半径（太陽中心から光線までの最近接距離）$r_\odot$，および光速度 c の関数として決まるだろう．$\theta \propto G^x m_\odot^y r_\odot^z c^w$．次元式で書くと

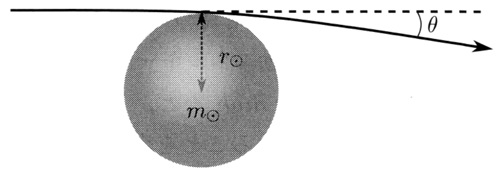


図 3　太陽の縁を通過する光の湾曲.

$$1 = (\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2})^x \mathrm{M}^y \mathrm{L}^z (\mathrm{LT}^{-1})^w \tag{8}$$

から $x = y = -z = -w/2$ を得る．すなわち，

$$\theta \propto \left(\frac{Gm_\odot}{c^2 r_\odot}\right)^x \tag{9}$$

である．x は何でもいいので一般には何かある関数 f を用いて

$$\theta = f\left(\frac{Gm_\odot}{c^2 r_\odot}\right) \tag{10}$$

と表されるというのが次元解析の結果である．ここでこの効果は G の 1 次であるということを用いれば，

$$\theta = (\text{無次元量}) \times \frac{Gm_\odot}{c^2 r_\odot} \tag{11}$$

を得る．この（無次元量）が 4 であって他の値ではないことが，一般相対性理論が正しい重力理論であることの証拠の一つである．しかし，次元解析だけではそこまで求めることはできない．

(d) 原爆のエネルギー

1945 年 7 月 16 日にニューメキシコ州で行われた原爆の爆破実験の様子を撮影した写真は，47 年になって機密文書扱いから外され，それを見たテイラーは次元解析を用いて爆発時に放出されたエネルギー E を見積もることができた[2]（写真 1 参照）．衝撃波の半径 R は，爆発時からの時刻 t，エネルギー E，および大気の密度 ρ の関数であると仮定すると，次元解析によって

$$R = (\text{無次元量}) \times \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{12}$$

となる．テイラーは撮影された衝撃波の膨張の様子から

$$R^5 t^{-2} = 6.67 \times 10^{13}\,\mathrm{m}^5\,\mathrm{sec}^{-2} \tag{13}$$

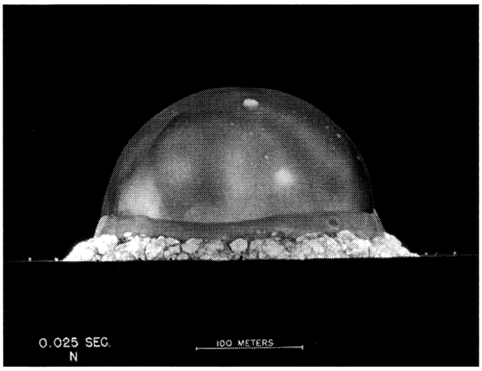


写真 1　1945 年の原爆実験の写真 (Berlyn Brixner 撮影).

とした.（無次元量）を正しく計算するのは（他の例のように）詳しい計算を必要とするが，おおよその評価をするには 1 であると仮定してよいだろう*1). 大気の密度を $\rho = 1.25\,\mathrm{kg/m^3}$ として $E \approx 8 \times 10^{13}\,\mathrm{J}$ を得る. 1 g の TNT 火薬は $4 \times 10^3\,\mathrm{J}$ のエネルギーを放出するので，これはおよそ 20 キロトンの TNT 火薬に相当する. この見積もりはかなり正確である*2).

以上述べたような次元解析の方法は，**バッキンガムの Π（パイ）定理**として知られる一般論にまとめられる[4]. いま，n 個の物理量 Q_j $(j = 1, \cdots, n)$ からなる関係式

$$\Phi(Q_1, \cdots, Q_n) = 0 \tag{14}$$

があるとする. この方程式に関係する基本的な次元（M, L など）を B_i $(i = 1, \cdots, m,\ n \geq m)$ とすると，Q_j の次元 $[Q_j]$ は

$$[Q_j] = \prod_{i=1}^{m} B_j^{a_{ij}} \tag{15}$$

のように表される. a_{ij} を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を**次元行列**と呼ぶ.

定理 1（Buckingham）　n 個の物理量の間のどのような物理的関係式 (14) も最大個数の独立な無次元量 Π_i $(i = 1, \cdots, n - r)$ を含む関係式

$$\Psi(\Pi_1, \cdots, \Pi_{n-r}) = 0 \tag{16}$$

と等価である. ただし，r は次元行列 A の階数 (rank) である.

3.「自然さ」

前節の例のように，次元解析によってわかるのは次元を持った物理量への依存性であって，無次元の比例係数がいくつかまではわからない. しかし，その比例係数は非常に大きな数または非常に小さな数であるのではなく，オーダーが 1 であると考えるのが自然である. この考え方を**自然さ** (naturalness) という. 実際，前節の例ではどれも（無次元量）は 1 のオーダーの数であった. 自然さを用いると，依存関係だけでなく物理量のだいたいの大きさが評価できる. 次元解析というとき，自然さを用いたオーダーの評価まで意味することがある.

4. 基本定数

次元を持った**物理定数**も次元解析において重要な役割を果たす. これらは特定の系とは無関係な，特徴的な大きさを表している. 特に重要なのは，**光速度** c と**プランク定数** $\hbar$ である. これらはそれぞれ相対論的効果と量子論的効果の大きさを決める基準となる.

このような，次元を持った基本定数の存在は，独立だと考えていた次元の間に関係をつけてしまうという点で重要である. 時間の次元は光速度 c をかけることによっていつでも長さの次元に換算されてしまう.

（特殊）相対論的効果と量子力学的効果の両方

*1)　テイラーは実験が行われる 4 年ほど前に理論を作り，この係数を求める近似式を得ていた（この論文は機密扱いだったのだが，後に出版された[3]）. この式から計算された係数は，実際 1 にかなり近い.

*2)　爆破実験の当日，爆破地点から 10 マイルほど離れた地点にいたフェルミは，6 フィートの高さから紙吹雪を落とすことで爆風の強さを見積もっていた. 爆風によって紙吹雪が 2.5 メートル飛ばされたことを見たフェルミは，前もって必要な計算をして作成しておいた数表から，即座に TNT 火薬 10 キロトン相当であることを知ったという. フェルミ畏るべし.

が重要である素粒子物理学では，c も $\hbar$ も現れてきて，これらの適当な積を作ると，どのような次元を持った物理量もただ一つの次元で表すことができる．このようにすることを**自然単位系**をとるという．素粒子物理学で通常用いられる次元は質量次元で，GeV（ギガ電子ボルト）というエネルギーの単位で測られる．

5. 系を特徴づける無次元量

系を記述する方程式が知られている場合にも，次元解析に基づく考察はその解の振舞いについて重要な情報を与えてくれる．簡単な例として減衰振動の運動方程式を考えよう．

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{17}$$

無次元量 $\tilde{t} = \omega t, \tilde{x} = x/x_0$ を導入して，この方程式を無次元化してみよう．ここで x_0 は典型的な長さスケールである．無次元化された方程式は

$$\tilde{x}'' + 2(\gamma/\omega)\tilde{x}' + \tilde{x} = 0 \tag{18}$$

となる．ただしプライム（$'$）は $\tilde{t}$ についての微分を表す．無次元量 γ/ω は系のサイズ（振幅，振動数）に無関係な，系の振舞いを特徴づけるパラメタになっている．よく知られているように，この方程式の解は γ/ω の大小（$= 1$, > 1，および < 1）によって全く異なった振舞いをする．

同様に，ナヴィエ・ストークス方程式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{19}$$

も無次元化してみよう（μ は粘度）．線形で時間微分しかなかった減衰振動の場合に比べて，こんどは多少複雑になる．典型的な長さスケール l，典型的な速度スケール U を用いて流速 $\boldsymbol{u}$，時間 t，および圧力 p を無次元化しよう．

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}/U, \quad \tilde{t} = t/(l/U), \quad \tilde{p} = p/(\rho U^2) \tag{20}$$

これらを用いて式 (19) は

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{u}}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + (\mathrm{Re})^{-1}\,\tilde{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{21}$$

と表される．ただし，$\tilde{\nabla}$ は $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/l$ についての微分（勾配）を表す．この式に現れる無次元量

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho l U}{\mu} \tag{22}$$

は**レイノルズ数**と呼ばれ，流れを特徴づける重要なパラメタである．

6. スケール変換と相似性

次元解析は，**スケール変換**とか，**相似**と呼ばれる概念と深く関係している．

スケール変換とは，文字通り物差しを取り替えることである．センチメートル目盛りの定規から，インチ目盛りの定規に取り替えると，10 (cm) が $10/2.54 = 3.94$ (in) と変わる．あらゆる長さに関わる数値が 1/2.54 倍になる．例えば速度も 10 (cm/s) が 3.94 (in/s) となる．1/2.54 のどのような冪で物理量が変換するかは，まさしく次元解析によって決まる．次元解析とは，物理量がスケール変換の下でどう変換するのかを決めることであるということができる．物理法則は物差し（単位）の選択に依存しない，というのは次元についての同次性の要請から導かれることである．

（同一の系に対して）物差しを取り替えることは，（物差しを替えずに）系のサイズを大きくしたり，小さくしたりするのと数値的には同等である．

長さのスケールだけでなく，時間のスケール（あるいは速度のスケール）を変えることによって，相似な運動を見いだすことができる場合がある．ケプラー運動を考えてみよう．惑星の質量を m とし，惑星の描く楕円軌道の長半径を a とすると，惑星の公転周期 T は G, a, m，および $m_\odot$ の関数として決まるだろう．次元解析により（未定の関数 f を含んだ形で），

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{Gm_\odot}}\, f\left(\frac{m}{m_\odot}\right) \tag{23}$$

と求まる．もちろんこれはケプラーの第 3 法則を表している．2 つの（同じ離心率を持った）楕円軌道は，幾何学的に相似であるだけでなく，時間に

ついても長さスケールの比の 3/2 乗倍することによって，運動自体が相似になることを示している．

このような性質は，もともと力がスケール変換の下で単純な振舞いをすることから来ている．ポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{r})$ が位置座標 $\boldsymbol{r}$ の同次関数で，$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \alpha\boldsymbol{r}$ の下で $V(\boldsymbol{r}') = \alpha^d V(\boldsymbol{r})$ と変換するとしよう．力は $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ で与えられるので，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') = \alpha^{d-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と変換する．いま，時間について $t \to t' = \beta t$ と変換すると，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right) m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{24}$$

となるので，運動方程式 $m\, d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = \boldsymbol{F}$ は

$$\beta = \alpha^{1-d/2} \tag{25}$$

というスケール変換の下で不変である．すなわち，$\boldsymbol{r}(t)$ という解が得られたら，この関係式を満足する任意の α と β に対して $\alpha\boldsymbol{r}(\beta^{-1}t)$ も解になる．

流体力学において，式 (21) を見ればわかるように，レイノルズ数が等しい流れは相似である．

7. 有効場理論での次元解析

最後に有効場理論での次元解析について簡単に述べよう．有効場理論では対称性によって許されるすべての演算子を考慮するが，それらの中で次元解析的に最も重要な（いくつかの）項だけで，系の振舞いはおおよそ決まってしまう．

ある相互作用が重要かどうかは，その相互作用を表す場の演算子の次元によって決まっている．次元の高い演算子は，興味のある物理の典型的な（質量次元を持った）スケール p と，**カットオフ**と呼ばれるその理論の適用限界を表す質量次元を持ったパラメタ Λ との比 p/Λ の冪で抑制され，小さな効果しか与えない．

例として，非相対論的な中性スカラー粒子と電磁場との低エネルギーでの相互作用を考えよう[5]．4 元速度 v の粒子の場を ϕ_v で表すと，相互作用は

$$\mathcal{L}_{\rm int} = c_1\phi_v^\dagger\phi_v F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2\phi_v^\dagger\phi_v v^\alpha F_{\alpha\mu}v_\beta F^{\beta\mu} + \cdots \tag{26}$$

と表される．ただし $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場の強さであり，あらわに書かれていない項はこの 2 項よりも次元の高い演算子である．ϕ_v は次元 $\mathrm{M}^{\frac{3}{2}}$，$F_{\mu\nu}$ は次元 M^2 なので，この 2 つの演算子は M^7 という次元を持つ．$\mathcal{L}_{\rm int}$ は次元 M^4 でなければならないので，係数 c_1, c_2 の次元は M^{-3} である．この次元は，カットオフによって供給されると考えるのが自然である．いま，中性粒子の内部構造までは問題とならないような低エネルギーを考えているので，理論のカットオフはこの粒子の半径の逆数程度であるとしてよい．$\Lambda \sim 1/d$．それゆえ，係数 c_1, c_2 は d^3 に比例する．以上から，この相互作用で記述される中性粒子による電磁波の散乱振幅は（摂動論の最低次で）d^3/λ^2 に比例することがわかる．これは前に議論したレイリー散乱の有効場理論になっている．

スケール変換の下での演算子の変換の性質を決めるのは，**スケール次元**と呼ばれるもので，演算子の量子論的な次元である．スケール次元は**繰り込み群**の解析によって得られる．多くの場合，スケール次元は素朴な次元解析から決まる次元とあまり変わらないが，繰り込み群の**非自明固定点**の近傍では量子効果によって大きく変更されることがある．そのような場合，（素朴な次元解析に基づく）自然さは成り立たない．

8. 達人の「技」

次元解析は，ニュートン，フーリエ，マクスウェル，レイリーなど，物理の達人たちが注目してきた「技」である．ぜひこの「技」を習得して，少しでも達人の域に近づきたいものである．

参考文献

1) Rayleigh, *Phil. Mag.* **41**, 107 (1871).
2) G.I. Taylor, *Proc. R. Soc. Lond.* **A201**, 175 (1950).
3) G.I. Taylor, *Proc. R. Soc. Lond.* **A201**, 159 (1950).
4) E. Buckingham, *Phys. Rev.* **4**, 345 (1914).
5) D.B. Kaplan, arXiv:nucl-th/9506035v1.

（はらだ・こうじ，九州大学基幹教育院）

国際単位系（SI）

普遍定数に基づく再定義の動き

藤井　賢一

1. はじめに

古くから様々な単位が用いられてきたが，その多くは五感で感じることができる大きさの物理量が選ばれてきた．現在広く用いられている**国際単位系**[1]（Système international d'unités: **SI**）[2] でも，時間，長さ，質量，熱力学温度，電流，物質量，光度の基本単位である**秒**（s），**メートル**（m），**キログラム**（kg），**ケルビン**（K），**アンペア**（A），**モル**（mol），**カンデラ**（cd）には，日常生活だけでなく産業，商業，貿易などの社会活動においても便利な大きさの物理量が選ばれている．例えば，キログラムの由来は水 1 リットルの質量であり，その定義には**国際キログラム原器**（international prototype of the kilogram: **IPK**）と呼ばれる白金イリジウム合金製の分銅の質量が用いられている．また，キャンドル（candle）を語源とするカンデラは，ほぼ蝋燭（ろうそく）1 本分の明るさに相当する電磁波のエネルギーから定義されている．

これとは対照的に**原子単位系**や**自然単位系**[3] などでは**光速度** c，**プランク定数** h，**電荷素量** e，**ボルツマン定数** k，**重力定数** G などの**基礎物理定数**[4~7] を基準として単位が決められている．これらの単位系を用いれば量子力学や相対論などの記述を簡素化できる．しかも，基礎物理定数の値は変わらないので，キログラムのように人工物の質量を基準とする単位系にはない優れた安定性と普遍性がある．しかし，その大きさは極めて小さく，例えばボーア半径と呼ばれる長さの原子単位は基底状態にある水素原子の電子軌道半径として定義され，その長さは $5.292\cdots \times 10^{-11}$ m である．人間の感覚で察知することは到底できない．

このような観点から，実社会における SI の便利さを保ちつつ，基礎物理定数のもつ普遍性を確保するために，基礎物理定数を用いてすべての SI 基本単位を再定義しようとする動きは以前からあったが，これまでは IPK の質量の長期安定性を上まわる高い精度で基礎物理定数（例えばプランク定数や**アボガドロ定数**など）を測定することができなかった．しかし，最近ようやく，これを上まわる精度での測定が可能となり，メートル条約に基づいて 2011 年に開催された第 24 回国際度量衡総会（CGPM）では，SI におけるすべての基本単位の基準を基礎物理定数や普遍定数に将来移行することが採択された．早ければ 2014 年に開催される第 25 回 CGPM で新しい定義が採択される可能性があり，特にキログラムについては実現すれば 125 年ぶりの大改定となる．本稿では，キログラムを中心にこれまでの定義の経緯について紹介し，基礎物理定数のような**普遍定数**による単位再定義の意義について考えてみたい．

2. キログラムの由来と現在の定義

現在の SI に通じるような国際的に統一された単位の基準を科学的に決めようとする試みが始まったのは 18 世紀末のフランス革命の頃に遡る．その歴史的経緯[8] について簡単に触れておこう．

1790 年代の革命の最中，フランスでは単位統一のための二大事業が展開されていた．一つは長さの単位であるメートルを決めるために行われたダンケルク・バルセロナ間の子午線測量である．どこの国にも属さない普遍性の象徴として当時は地球の大きさが選ばれた．これは約 1000 km に及ぶ子午線の長さを，当時の最新鋭の技術であったボルダの測角器を用いて実測するという難事業だった．この測量結果に基づいて北極から赤道までの子午線の長さの 1000 万分の 1 としてメー

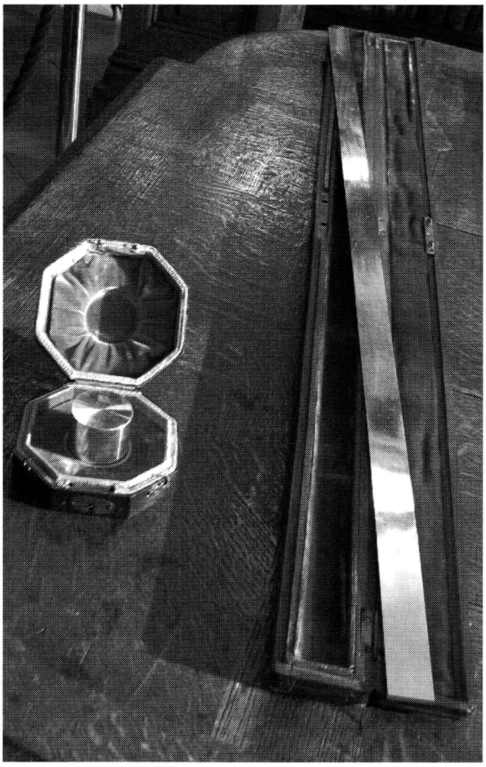


図 1　フランス国立公文書館に保管されているアルシーフの原器．写真提供：T. Quinn 元国際度量衡局（BIPM）局長．左：確定キログラム原器，右：確定メートル原器．いずれも純白金製．

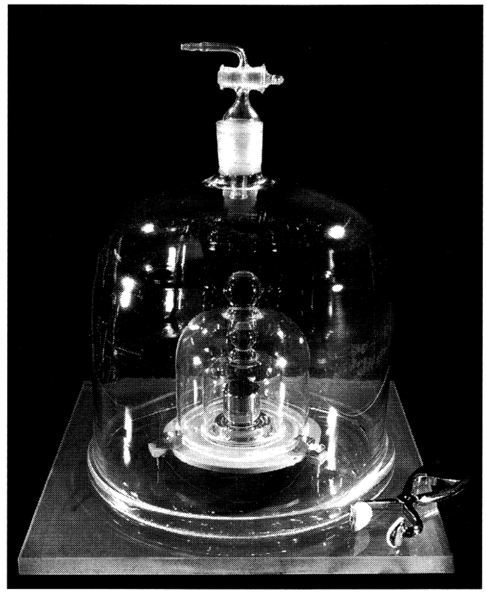


図 2　国際キログラム原器（IPK）．写真提供：国際度量衡局（BIPM）．白金 89.9%，イリジウム 10.09%から成る合金製の分銅．直径，高さともに約 39 mm の円柱．

トルが定義され，純白金製の**確定メートル原器**（Mètre définitif）が作製された．これと並行して行われたもう一つの大事業は，質量の単位であるキログラムを決めるためにラボアジェらが行った 1 リットルの蒸留水の質量測定である．この測定に基づいて純白金製の**確定キログラム原器**（Kilogram définitif）が作製された．これらの原器を長さと質量の単位とするメートル法がフランスで公布されたのは 1799 年のことである．これらの純白金製の原器はその後，共和国公文書館に保管されたのでアルシーフ（Archives）の原器と呼ばれるようになった（図 1 参照）．

その後，メートル法の優位性は諸外国でも認められるようになり，1875 年に開催されたメートル法外交官会議において欧州を中心とする 17 カ国によってメートル条約が締結され，可能な限りアルシーフの原器に近い値をもつ国際原器と各国に配布するための原器群が白金よりも硬くて磨耗に強い白金イリジウム合金でつくられた．このような経緯で作製された**国際メートル原器**と IPK（図 2 参照）をそれぞれ長さと質量の単位とすることが 1889 年に開催された第 1 回国際度量衡総会（CGPM）で採択された．これらはパリ郊外にある**国際度量衡局**（BIPM）に保管されている．

その後の科学技術の進歩により国際メートル原器は不要となり，1983 年には真空中における光の速さが定義され，光周波数 ν の測定からその波長 $\lambda = c/\nu$ を求めて長さの単位を実現することができるようになった．これは科学的に考えても最も妥当な定義であり，光速度を一定不変とする相対論によれば，セシウム原子時計（セシウムの超微細構造から生じる原子の振動を利用した時計）を使って時間さえ測れば宇宙の何処でも同じ長さが実現できるのである．現在では周波数，長さ，温度，電圧，電気抵抗といった物理量の単位の多くは恒久不変と考えられる自然現象あるいは基礎物理定数を使って実現できるようになった．これらの進歩の背景には 20 世紀の科学である相対論，量子力学，超伝導，レーザなどの発見・発明がある．それに対し，キログラムだけは SI の中で人工原器に頼る唯一の基本単位として残り，現在でも「キログラムは質量の単位であって，単位の大きさは IPK の質量に等しい」として定義されている．

図 3 は IPK の質量を基準として測定された BIPM の副原器の質量の履歴を 100 年間に渡って記録したも

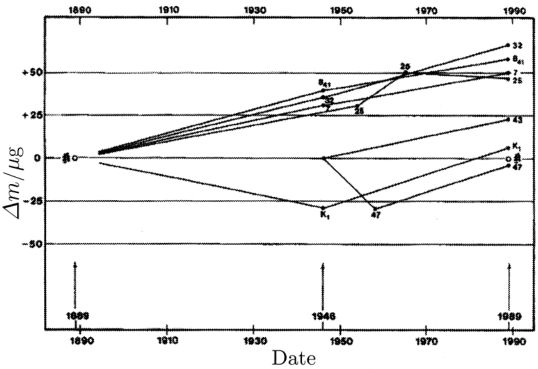


図 3　国際キログラム原器（IPK）の質量を基準とした場合の副原器の質量の履歴[9]．多くの副原器の質量は増加したかのようにみえるが，IPK の質量が過去 100 年の間に減少した可能性もある．

のである[9]．この図から，副原器の質量は 100 年間でおよそ 50 μg 変動してきたことが分かる．しかし，IPK の質量も表面汚染の影響などで変動してきた可能性があり，絶対的に安定な質量の基準が他にない以上，どちらが変動したのかを正確に知る手がかりはない．これらのデータから，白金イリジウム合金製の分銅に頼る現在の定義の長期安定性は 5×10^{-8}（1 億分の 5）程度が限界であると考えられている．このような理由から，基礎物理定数や原子の質量など普遍的な物理量を基準としてキログラムを再定義することが必要であると考えられるようになった[10]．

3. キログラム再定義の動き

キログラムの再定義案には**原子の数**から質量を決めるアボガドロ定数 $N_{\rm A}$ に基づくものと，**相対論**と**光電効果**から光子のエネルギーと質量とを関係づけるプランク定数 h に基づくものとがある[11, 12]．前者は比較的古くからある考え方であり，相対原子質量の基準である ^{12}C の単原子あたりの質量を基準にすれば，

- キログラムは基底状態にある静止した $5.018 \cdots \times 10^{25}$ 個の自由な炭素原子 ^{12}C の質量に等しい．

と再定義することができる．ここで，$5.018 \cdots \times 10^{25}$ という数値はアボガドロ定数 $N_{\rm A} = 6.022 \cdots \times 10^{23}\,{\rm mol}^{-1}$ の数値の部分を 1000/12 倍して求められる．この再定義方法を採用すると，現行の物質量の単位を「モルは $6.022 \cdots \times 10^{23}$ 個の要素粒子を含む系の物質量である」と書き改め，1 モルの要素粒子数を明示することができるようになる．

一方，プランク定数に基づく定義は比較的最近注目されるようになった．アインシュタインの相対論と光電効果からエネルギーを $E = mc^2 = h\nu$ と表すことから出発する．ここで，m は物体の静止質量，ν は光子（電磁波）の周波数である．エネルギーと質量が等価であり，しかも光子の周波数を使ってそのエネルギーを表すことができることを考えれば，静止質量 m と等価なエネルギーをもつ光子の周波数は $\nu = mc^2/h$ である．真空中の光の速さ $c = 299\,792\,458\,{\rm m/s}$ は 1983 年の SI 改定以来，既に定義になっているので，m に 1 kg を代入して，プランク定数 $h = 6.626 \cdots \times 10^{-34}$ Js を定義してしまえば，

- キログラムは周波数が $[(299\,792\,458)^2/(6.626 \cdots \times 10^{-34})]$ ヘルツの光子のエネルギーと等価な質量である．

と再定義することもできる．

キログラムを再定義する上で，アボガドロ定数とプランク定数のいずれを用いて表現すべきなのかがしばしば議論されてきたが，両者の間には以下の厳密な関係が成立するので，いずれの定数を用いてキログラムを定義しても，適切な実験さえ行えばどちらのルートからでもキログラムを実現することができる．

$$N_{\rm A} = cM_{\rm e}\alpha^2/(2R_\infty h). \qquad (1)$$

ここで，$M_{\rm e}$ は電子のモル質量，α は微細構造定数，R_∞ はリュードベリ定数であり，式 (1) 右辺において h を除く基礎物理定数群は 7.0×10^{-10} の相対標準不確かさ（以下単に精度と呼ぶ）で既に求められている[5]．

プランク定数 h からキログラムを実現する実験方法の中で，現在最も精度が高いのは**ワットバランス法**である．この方法は元々，**ジョセフソン効果**と**量子ホール効果**からプランク定数 h を測定するために開発されたものである．まず，磁場中の導体に電流 I を流すと力 F が発生する．この導体を同一磁場中で速度 v で移動させると電圧 U が発生する．このとき電気的仕事率 UI は力学的仕事率 Fv に厳密に等しいので，時間，長さ，質量などの力学量の測定から電気的仕事率を求めることができる．ここで，電圧 U をジョセフソン電圧 $U_{\rm J} = n\nu/(2e/h) = n\nu/K_{\rm J}$ で表し，電流 I を量子化ホール抵抗 $R_{\rm H} = (h/e^2)/i = R_{\rm K}/i$ とジョセフソン電圧で表せば，プランク定数は $h = 4/(K_{\rm J}^2 R_{\rm K})$ として求められる．$K_{\rm J} = 2e/h$ と $R_{\rm K} = h/e^2$ はそれぞれジョセフソン定数とフォン・クリッツィング定数

と呼ばれ，電圧や電気抵抗の標準を実現するための基準として広く用いられている．現行のSIの定義では力学的仕事率 Fv の測定から電気的仕事率 UI を求め，これをもとにアンペアの定義が実現されているが，再定義が実施されると，これとは逆に定義されたプランク定数 h から電気的力 F を求めて，これと釣り合う重力 mg としてキログラムが実現される．ここで，g は重力加速度を表す．2007年に米国国立標準技術研究所（NIST）で 3.6×10^{-8} の精度が得られ，初めて基礎物理定数の測定精度がIPKの質量の長期安定性（5×10^{-8}）を上まわった[13]．

一方，アボガドロ定数 N_{A} に基づいてキログラム実現する方法として**X線結晶密度法**が挙げられる．例えば，シリコン結晶の格子定数を a，密度を ρ，モル質量を M とすれば，$N_{\mathrm{A}} = 8M/(\rho a^3)$ として求められる．従来は自然同位体比のシリコン結晶が用いられてきたのでモル質量 M の測定精度に限界があったが，最近になり，^{28}Si同位体濃縮単結晶から N_{A} を高精度化するための国際プロジェクト（International Avogadro Coordination (IAC) Project）が実施された[14,15]．このプロジェクトには産業技術総合研究所の計量標準総合センター（NMIJ），ドイツ物理工学研究所（PTB），イタリア計量研究所（INRIM），オーストラリア連邦計量研究所（NMIA），欧州標準物質計測研究所（IRMM），BIPM，NIST，英国物理研究所（NPL）などが参加した．遠心分離法による同位体濃縮，化学精製，多結晶化などを経て99.99%まで同位体濃縮された5 kgの ^{28}Si同位体濃縮単結晶を作製し（図4参照），この結晶の格子定数，密度，モル質量の測定から N_{A} が測定された．特に密度の精密測定のために，この結晶から直径94 mm，直径の最大偏差70 nm，質量1 kgの球体を2個研磨し，NMIJのレーザ干渉計（図5参照）を使ったサブナノメートルの精度での直径測定などが行われた[16]．このようにして求められた N_{A} の精度は 3.0×10^{-8} である．

ワットバランスや ^{28}Si同位体濃縮単結晶から得られたプランク定数の値の比較を図6に示した．NISTが2007年にワットバランスから求めた値と，IACプロジェクトによって2011年に ^{28}Si同位体濃縮単結晶から得られた値の精度が最も高いが，両者の間には 1.8×10^{-7} の相対的な隔たりがある．質量関連量諮問委員会（CCM）では，キログラムを再定義するためには，より多くの独立した高精度実験が必要であると考えられている．

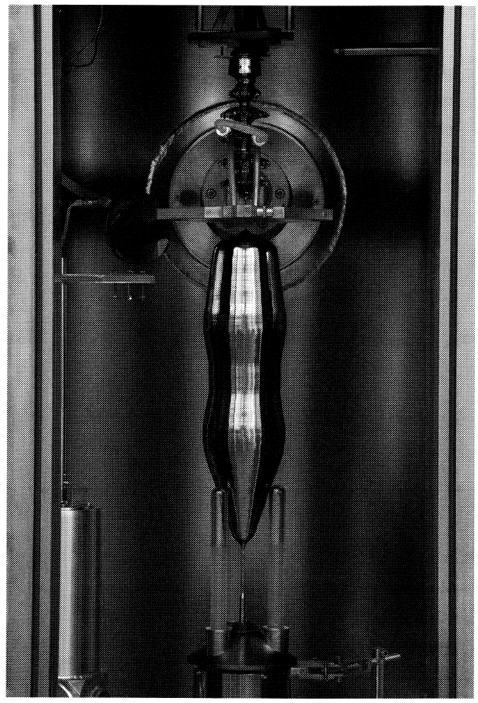


図4 FZ（浮遊帯域）法で引き上げられた濃縮度99.99%，質量約5 kgの ^{28}Si同位体濃縮単結晶[14,15]．

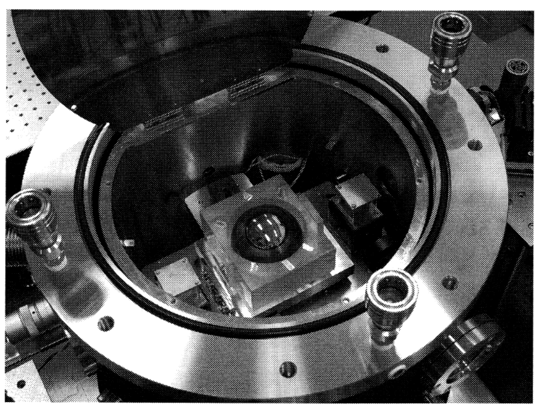


図5 シリコン球体の直径（約94 mm）をサブナノメートルの精度で測定するレーザ干渉計[16]．

4. ケルビン再定義の動き

現在のような水の三重点によるケルビンの定義は1954年に開催された第10回CGPMで決められた．その後，1968年国際実用温度目盛（IPTS-68）によって定義定点の温度値と，定義定点の間を補間するための方法が決められ，現在用いられている1990年国際温度目盛（ITS-90）に至っている．水の三重点は人工物ではないので誰もが利用することができるが，その

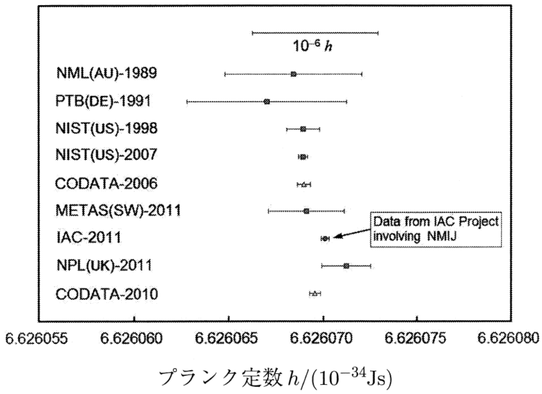


図 6　異なる原理で測定されたプランク定数 h の値の比較.

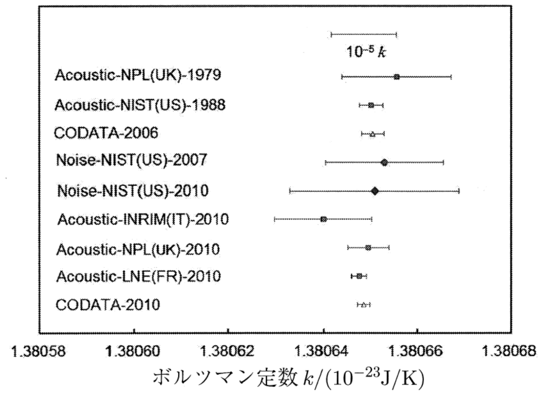


図 7　異なる原理で測定されたボルツマン定数 k の値の比較.

温度は同位体組成の変動の影響を受ける．このため現在の SI では標準平均海水（SMOW）に等しい同位体組成を有する純水を用いることになっている．しかし，定義定点の温度値を決め，補間の精度を確かめるためには熱力学温度の測定による検証が不可欠である．このため温度諮問委員会（CCT）では，メートルやキログラムのように基礎物理定数を用いてケルビンを再定義することが検討されている．例えば，理想気体の音速の 2 乗は熱力学温度に比例するので，ボルツマン定数 k を定義してしまえば，気体定数を $R = kN_A$ として求め，**音響法**（気体の音速測定）などから熱力学温度 T を実現することができる．

現在，球共鳴器による熱力学温度の測定に関する研究が NIST，フランス計量研究所（LNE），INRIM，NPL などで進行中である[17~19]．その他にまだ不確かさは大きいが，電気抵抗が発生する雑音（noise）を用いた熱力学温度計測などによる実験値も報告されている（図 7 参照）．

現在までに報告されている k の値の中で最も精度が高いのは LNE の quasi-spherical resonator による測定[17]であり，その精度は 1.2×10^{-6} である．他の値も含めた重み付き最小二乗法から求められるボルツマン定数の精度は 9.1×10^{-7} であり，ようやく 1.0×10^{-6} の壁を突破した．これは室温付近の温度に換算すると約 0.3 mK の精度に相当する．

CCT では，気体の誘電率測定（DCGT）による実験などを含む異なる測定原理によるボルツマン定数の測定なども実施し，実験データの信頼性をさらに高めることが検討されている．

5. アンペア再定義の動き

SI は基本単位にアンペアを加えた MKSA 4 元単位系に属し，CGS 3 元単位系などに比べて電気量の単位の表現が便利なのが特徴である．現在のアンペアは，2 本の無限に長い平行な導線に電流を流したときの単位長さあたりの導線に働く力によって定義されている．その結果，真空の透磁率はアンペールの法則から $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{NA}^2$ となる．しかし，この定義を実現するためにはワットバランスのような大掛かりな実験が必要なので，利便性の観点からジョセフソン定数とフォン・クリッツィング定数についての協定値（$K_{\mathrm{J\text{-}90}}$ と $R_{\mathrm{K\text{-}90}}$）を決めて電圧と電気抵抗を実現することが 1988 年の国際度量衡委員会（CIPM）で勧告された[1,2,20]．これらの量子効果に基づいて現在の電気標準が実現されている．

ジョセフソン効果と量子ホール効果には IPK の長期安定性を上まわる極めて高い再現性があるが，協定値に頼る限り SI の定義にトレーサブルであるとは言えない．そこで，第 24 回 CGPM では h だけでなく e も定義し，将来は 1 秒間に流れる電子の数でアンペアを再定義することが採択された．このとき，再定義に必要な電荷素量 e の値は基礎物理定数の関係式から以下のようにして求められる．

$$e^2 = 2\alpha h/(\mu_0 c). \qquad (2)$$

微細構造定数 α の精度は十分に高いので，e は h の約半分の不確かさで求められる[5]．キログラムは h と N_A のいずれを用いても再定義することができるが，現在の再定義案で h が選ばれている理由は，ジョセフソン効果と量子ホール効果によって既に実現されている電気標準の利便性を生かすためである．

最近では電荷素量 e によるアンペアの定義を直接

的に実現するために**単電子トネリング**（SET）デバイス[21,22]の開発も進められている．これは変動するゲート電圧の周波数として電子の数を正確にカウントするものであり，電流を周波数に直結する技術として注目されている．

6. 再定義がもたらすもの

計測技術の進歩によって，第1回CGPMが開催された1889年以来ようやくプランク定数やアボガドロ定数の測定精度のほうがIPKの質量の長期安定性よりもよくなってきた．その結果，メートル条約に基づいて2011年に開催された第24回CGPMにおいて7つのSI基本単位のうちキログラム，アンペア，ケルビン，モルの再定義案が審議され，将来はプランク定数 h，電荷素量 e，ボルツマン定数 k，アボガドロ定数 N_A を基準として質量，電流，温度，物質量の単位の定義を変更することが採択された．特にキログラムに関しては歴史上初めて質量の単位の定義が人工物から切り離されて，普遍的な定数と結びつくことになる．

それと同時に h, e, k, N_A の値を定義するためには，実験技術の更なる高精度化や，独立した測定原理による実験データの蓄積などによって，信頼性をさらに高めることが必要である．

メートルの定義が光速度へと移行したのは1983年であるが，2005年のノーベル物理学賞に輝いた**光周波数コム**[23]などの技術が完成して，便利よく光周波数が測れるようになるには，定義改定から約20年を要した．SI基本単位の定義改定は我々の生活に直ちに大きな影響を与えるものではないが，再定義が幾つかのブレークスルーを生み，より新しい測定原理や計測技術へとつなげる効果があることを過去の事例は物語っている．

参考文献

1) 『国際文書第8版（2006）/日本語版，国際単位系（SI）』，安心・安全を支える世界共通のものさし，訳編者：産業技術総合研究所計量標準総合センター，第1版，日本規格協会，2007.
2) *The International System of Units*, 8th edition, Bureau International des Poids et Mesures, 2006.
3) 和田純夫，大上雅史，根本和昭，『単位がわかると物理がわかる—SI単位系の成り立ちから自然単位系まで』，第3版，ベレ出版社，2003.
4) ピーター・ムーア，バリー・テイラー，デイビッド・ニューエル，訳：藤井賢一，「基礎物理定数」，パリティ，**25-11** (2010) 14–19.
5) P.J. Mohr, B.N. Taylor, D.B. Newell, "CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010", *Rev. Mod. Phys.*, **84** (2012) 1527–1605.
6) 特集：「物理定数のプロフィール—その進化と変遷」，数理科学，2002年3月号.
7) 特集：「物理定数のイメージ」，数理科学，1988年5月号.
8) 藤井賢一，「キログラムの再定義—単位の普遍性をめざして」，『〈はかる〉科学』，第2章，中公新書，阪上孝・後藤武編著，2007.
9) T.J. Quinn, "The kilogram: The present state of our knowledge", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **40** (1991) 81–85.
10) T. フェダー，訳：藤井賢一，「キログラムの再定義をめぐる実験を検証する」，パリティ，**21-8** (2006) 41–44.
11) 藤井賢一，「質量標準と基礎物理定数—質量の単位の定義をめぐる最近の動き—」，応用物理，**68-6** (1999), 656–662.
12) 藤井賢一，「基礎物理定数の新しい推奨値—アボガドロ定数とプランク定数の決定をめぐる最近の動き—」，日本物理学会誌，**57-4** (2002) 239–246.
13) R. Steiner *et al.*, "Uncertanity improvements of the NIST electronic kilogram", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **56** (2007) 592–596.
14) B. Andreas *et al.*, "An accurate determination of the Avogadro constant by counting the atoms in a ^{28}Si crystal", *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011) 030801.
15) B. Andreas *et al.*, "Counting the atoms in a ^{28}Si crystal for a new kilogram definition", *Metrologia*, **48** (2011) S1-S13.
16) N. Kuramoto, K. Fujii, and K. Yamazawa, "Volume measurements of ^{28}Si spheres using an interferometer with a flat etalon to determine to determine the Avogadro constant", *Metrologia*, **48** (2011) S85–S95.
17) L. Pitre *et al.*, "Measurement of the Boltzmann Constant k_B Using a Quasi-Spherical Acoustic Resonator", *Int. J. Thermophys.*, **32** (2011) 1825–1886.
18) G. Sutton *et al.*, "Acoustic resonator experiments at the triple point of water: first results for the Boltzmann constant and remaining challenges", *Int. J. Thermophys.*, **31** (2010) 1310–1346.
19) R.M. Gavioso *et al.*, "A determination of the Boltzmann constant from speed of sound measurements in helium at a single thermodynamic state", *Metrologia*, **47** (2010) 387–409.
20) 金子晋久，「国際単位系SIの改定と量子電気標準の課題」，JEMIC計測サークルニュース，**41-2** (2012) 1–7.
21) 勝本信吾，「量子ドットの電子状態と電気伝導（その1）」，固体物理，**44-10** (2009) 639–655.
22) ニール・ツィマーマン，訳：藤井賢一，「量子電気標準」，パリティ，**26-12** (2011) 48–50.
23) 洪鋒雷，「光コム—光科学のイノベーション」，応用物理，**79-6** (2010) 546–549.

（ふじい・けんいち，産業技術総合研究所）

普遍定数と次元

仲　滋文

1. たった一つ？

1940年の春のことである．“ある日，プリンストンの大学院の部屋にホイーラー教授からの電話がかかりました．「ファインマン君，なぜ電子がみんな同じ電荷，同じ質量をもっているのか，わかったよ.」「なぜなのですか.」「それはね，みんな一つの電子だから！」．教授は，電話で説明してくれました[1)]…”．

J.A. ホイーラー教授の考えによると，電子は時空を時間の進む向きだけではなく遡る向きにも移動し，その際は陽電子として観測される．そこでたった一つの電子ではあっても，組紐のように絡み合って織りなす世界線を時刻一定の面で切ると，たくさんの電子と陽電子があるように見える (図 1)．これらは一つのものであるから，電子の電荷の大きさは，“いつも”，“どこでも” 同じだということになる．R.P. ファインマンは，陽電子が時間を遡る電子だという見方には頷いたが，すべての電子が実は同一であるアイデアは真面目に受け取らなかった．しかしホイーラー教授でなくとも，電子の電荷の大きさ（素電荷 e）が時と**場所**を選ばない基本的な物理定数，即ち**普遍定数**であることの意味を解明できたとすれば，興奮してアイデアを話したくなるに違いない．

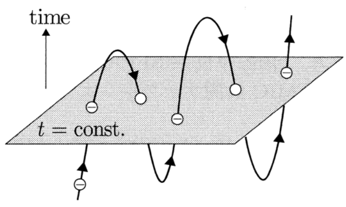


図 1　過去から未来に移動する電子の世界線の t =const. の断面には，電荷 $-e$ の電子が，また未来から過去に辿る世界線の断面には電荷 $+e$ の陽電子があるように見える．

素電荷 e と同じく，光速度 c や万有引力定数 G，さらにはミクロの世界を掌るプランク定数 $\hbar$ なども，自然を支配する次元（単位）のある普遍定数と考えられていて，その認識は自然科学の発展の歴史と共に確立されてきている．

一方，次元をもつ普遍定数の組合せでつくられる微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\cdots$ のような数値もまた[*1)]，普遍定数の性格を持つと考えられる．むしろ，次元をもたない普遍定数の値は人為的な単位の設定に依存しないため，これらはより基本的な普遍定数とも考えられる．基本的と言う言葉の意味が，混乱を招かなければではある．

2. 基本的な物理定数と次元

物理定数には，次元を持つものと持たないものがある．次元を持つ物理定数の値は，例えば重さの単位である g（グラム）が古代バビロニアで小さな穀物粒（grain）を単位として重さを測定した

*1)　これは電荷を CGS 静電単位系で表した場合の形である．SI 単位系では，$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$（$\epsilon_0$：真空の誘電率）となる．

ことに始まるように，人為的な手段によって測定されたものであり，測定の手段を変えることにより値が変わる．一方，無次元の物理定数はこのような手段によらずに意味を持つ，より基本的な物理定数と考えられている．

次元をもつ物理定数の単位も，多くは**長さ**(L)，**時間**(T)，**質量**(M)といった**力学的単位**を定めれば，その**組立単位**として表現することができる．このような(L, M, T)単位での物理量Qの次元を$[Q]$と書くなら，$[\text{速さ}] = LT^{-1}$，$[\text{運動量}] = MLT^{-1}$，$[\text{力}] = MLT^{-2}$，$[\text{エネルギー}] = ML^2T^{-2}$であり，これから

$$[c] = [\text{速さ}] = LT^{-1}, \tag{1}$$

$$[G] = [\text{力}\cdot(\text{距離})^2/(\text{質量})^2] = M^{-1}L^3T^{-2}, \tag{2}$$

$$[\hbar] = [\text{長さ}\cdot\text{運動量}] = [\text{時間}\cdot\text{エネルギー}] = ML^2T^{-1} \tag{3}$$

等が得られる．

ところで，(1)–(3)のL, M, Tは，$[c], [G], [\hbar]$で解くことができる．1899年，M. プランクはウィーンの輻射の公式に現れる現在の$\hbar$に相当する定数を用いて，彼自身が自然単位と呼んだ

$$l_{\rm P} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1.616 \times 10^{-35}\,\text{m}, \tag{4}$$

$$m_{\rm P} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 2.177 \times 10^{-8}\,\text{kg}, \tag{5}$$

$$t_{\rm P} = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 5.390\times \sim 10^{-44}\,\text{s}, \tag{6}$$

および絶対温度$T_{\rm P}$を導いた[2)]．ただし，温度は熱平衡状態を記述するためにエネルギーを換算したもので，例えばJ（ジュール）で表したエネルギーEは絶対温度K（ケルビン）にE/kで換算される．ここで，$k \simeq 1.380 \times 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$はボルツマン定数である．そこで，まず(5)からエネルギーの自然単位$E_{\rm P} = m_{\rm P}c^2$をつくると

$$E_{\rm P} = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1.956 \times 10^9\,\text{J} \tag{7}$$

$$(\sim 1.22 \times 10^{19}\,\text{GeV})$$

となり，これから$T_{\rm P} = E_{\rm P}/k \sim 1.417 \times 10^{32}\,\text{K}$の値が得られる．(6)–(7)は，現在では“プランク時間$t_{\rm P}$”のようにプランクの名を冠して呼ばれ，重力定数とプランク定数を含むことから，量子重力が有効に働く尺度と考えられている．

さて，ホイーラー教授を興奮させた素電荷eの次元は，どうなるのだろうか．いま，距離rだけ離れた電荷Q, Q'に働くクーロン力Fを，CGS静電単位系のように

$$F = K\frac{QQ'}{r^2} \quad ([K] = 1) \tag{8}$$

で定義すると，eの次元は(L, M, T)を使った組立単位で表すことができ，

$$[e] = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1} \tag{9}$$

となる．そこで，eを$\hbar$に代わる独立した普遍定数として扱えば，古典物理の範囲内でL, M, Tの自然単位をつくることができる．1870年，G.S. ストーニー[*2)]はこのようにして

$$l_{\rm S} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2}, \quad m_{\rm S} = \frac{e}{\sqrt{G}}, \quad t_{\rm S} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3} \tag{10}$$

を導入した[*3)]．当然ながら，プランクとストーニーの対応する自然単位の比は無次元の数値となり，その結果が微細構造定数

$$\alpha = \left(\frac{l_{\rm S}}{l_{\rm P}}\right)^2 = \left(\frac{m_{\rm S}}{m_{\rm P}}\right)^2 = \left(\frac{t_{\rm S}}{t_{\rm P}}\right)^2 \tag{11}$$

になるのである[4)]．

---

*2) George Johnston Stoney (1826–1911，アイルランドの物理学者)：ストーニーは，電気分解の分析から素電荷の考え方を持ち，電荷の大きさを素電荷を単位として表すことを考えた．J.J. トムソンが陰極線の粒子性を確立した際，ストーニーの提案に従って“electron”の用語を導入した．

*3) cの代わりに$\hbar$を独立した普遍定数として用い，(L, M, T)の自然単位

$$l_{\Psi} = \sqrt{\frac{G\hbar^4}{e^6}}, \quad m_{\Psi} = \sqrt{\frac{e^2}{G}}, \quad t_{\Psi} = \sqrt{\frac{G\hbar^6}{e^{10}}}$$

をつくることができる．M.J. ダフは，これをシュレディンガー単位と呼んだ[4)]．これはプランク，ストーニーおよびシュレディンガーの単位系で，(9)に従って電荷の単位を組み立てることもでき，それぞれ$q_{\rm P} = \sqrt{\hbar c}$, $q_{\rm S} = e$，および$q_{\Psi} = e$となる．

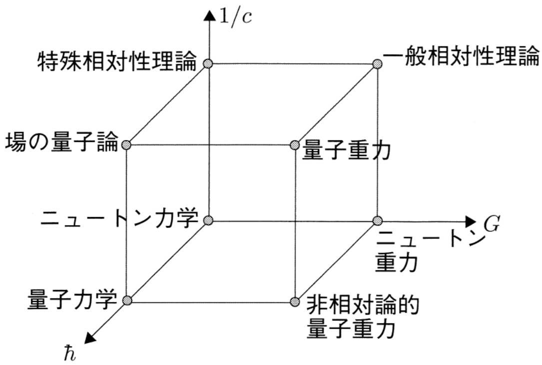


図 2　L.B. オクンによる，理論と物理定数の有効関係を表す立方体[3]．適当な尺度の下で，$1/c, \hbar, G$ を立方体の軸に配置できるが，もしこれらが普遍定数でなければ，上図は宇宙の時間発展と共にゆがんだ形になる．

$c, G, \hbar$ は物理的世界を特徴づける基本定数であり（図 2），時と場所を選ばぬ普遍定数と考えられているが，さて，これらは本当に普遍であろうか？

■　3. 微細構造定数は普遍？　■

無次元の普遍定数である微細構造定数は，水素型原子*4) のスペクトル公式に相対論的補正を加えた微細構造を求める過程で，A. ゾンマーフェルト（1916）により前期量子論をもとに導入された[5]．より確実には，ディラックの相対論的波動方程式から価電子のエネルギーを求めればよく，例えば原子番号 Z の原子における価電子が，主量子数 n，全角運動量 j の状態にある場合のエネルギーは，$\kappa = j + \frac{1}{2}$ として

$$E = m_e c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n - \kappa + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \right\}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{12}$$

と求まる（ここで，m_e は電子の質量）．非相対論的な水素型原子のエネルギーは $E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2}$ であるから，相対論的補正項は E から E_n と静止エネルギー $m_e c^2$ を差し引いた $\Delta_n = E - m_e c^2 - E_n \sim O(\alpha^2)$ で与えられ，もしそれが変化するとすれば，その微小変化の係数は α に比例する．1998 年，J.K. ベブは (12) に多体の効果を入れて修正した補正項をもとに，異なる位置，異なる距離（時間）にあるガス雲のクエーサー吸収線の解析から，おおまかに

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx 2 \times 10^{-23}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{13}$$

（赤方偏移：$0.5 < z < 3.5$）を得た[6]．$|\delta\alpha/\alpha| \neq 0$ はその後も異なるグループにより検証が続けられているが，これが正しければ α は吸収線を生じるガス雲の時と場所に依存し，普遍定数ではないことになる．

さて，α の微小変化は，

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = 2\frac{\delta e}{e} - \frac{\delta\hbar}{\hbar} - \frac{\delta c}{c} \tag{14}$$

と表すことができる．従って，無次元の定数が $|\delta\alpha/\alpha| \neq 0$ である場合は，必然的に次元をもつ定数 $e, c, \hbar$ のいずれか，あるいはいずれもが，普遍定数ではなくなる．

一方，$e, \hbar, c$ が普遍定数ではないとしても，その変化が相殺し合い，無次元の α が普遍定数に止まることはあり得る．また，次元をもつ定数の値は人為的に選ばれた単位をもとにしており，値の変化は単位を定める要素の変化にも連動する．そこで，測定の曖昧さを伴わずに普遍性を検証できる自然定数は，無次元の自然定数ということになる．

■　4. ディラック，G を動かす！　■

量子力学の建設者の一人で，アクロバティックな思考で人を驚かせる P.A.M. ディラックは，普遍定数と思われている自然定数もまた，時空の有り方と関連するのではと考えた[7]．ディラックは，陽子と電子の間に働くクーロン力 $\frac{e^2}{r^2}$ と重力 $G\frac{m_p m_e}{r^2}$ の比が，$N_1 = \frac{e^2}{G m_p m_e} \approx 2 \times 10^{39}$ という大きな無次元数になることに注目し，このような大数は何らかの形で現在の宇宙年齢 t に結びつくと予測した（ここで，m_p は陽子の質量）．そこで少々強引に，

*4)　核の周りの閉殻をなす電子群と，その外側の一つの価電子で構成される原子で，ナトリウム（Na）やカリウム（K）等のアルカリ原子はこの例である．

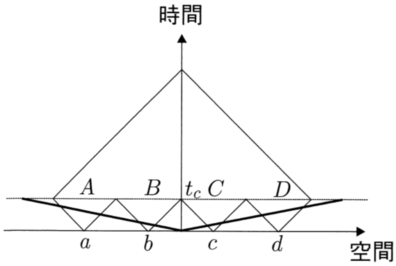


図 3 現在の光速度 c が普遍であるとすれば，地平線には因果的に独立な地点 a,b,c,d が引き延ばされた A,B,C,D の領域が入り，しかも一様に見えると言う不思議な状況が生じる．もし，t_c 以前の光（太線）の速さが $c' > c$ であるとすれば，地平線には因果的領域の引き伸ばされた姿が見えることになり，一様性と矛盾しない．

t を (古典電子半径)/(光速) $= \frac{e^2}{m_e c^3}$ の時間で測って得られる大数 $N_2 = t/\frac{e^2}{m_e c^3} \approx 7 \times 10^{39}$ を持ち出し，2 つの大数の桁の一致は偶然ではなく，両者は常に $N_1 \sim N_2$ の関係にあると考えた*5)．もしそうであれば，e, m_e, m_p を普遍定数とすれば，G は宇宙年齢と共に $G \sim t^{-1}$ と変化することになる[8)]．ただ，ディラックの仮説はこれ以上に先に進む指針に乏しく，必ずしも追随する研究者は多くなかった．現在 G の変動は，連星パルサーの観測から $\dot{G}/G = (1.0 \pm 2.3) \times 10^{-11} yr^{-1} < 0.1/t$ の上限が与えられているが，その有無を明確には結論できていない．とは言え，普遍定数に自由な視点をもたらしたディラックの影響は大きく，物理学者の多くは，普遍定数と言えども動かし得るという，ディラックの洗礼を受けてしまったのである．

■ 5. 何だって変わる？ ■

さて，G のような次元を持つ普遍定数が変化する可能性があるとすれば，無次元の微細構造定数 α の変化を，e, c，あるいは $\hbar$ の変化から説明しようとする考え方も自然である

実際，M.J. デービスたち（2002）は，質量 M，電荷 Q の（回転しない）ブラックホールの（ベッケンシュタイン–ホーキング）エントロピーはその表面積に比例し，

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{k\pi G}{\hbar c}\left\{M + \sqrt{M^2 - Q^2/G^2}\right\}^2 \quad (15)$$

と書けることに注目して，e の変動がブラックホールのエントロピーの変化から制限を受けることを指摘した[9)]．さらに J.J. マックギボン (2007) は，$\hbar c$ が不変の場合，熱力学の第二法則から S_{BH} は Q の減少と共に増加するように見えるが，環境体のエントロピーまで含めると S_{BH} の増加と Q の増加が結びつき，(13) と矛盾しない変化量 $\frac{\delta e}{e} \approx 10^{-23}\,\mathrm{s}^{-1}$ が導かれることを示した．

一方，α の変化の要因は，e ではなく c であるとする考え方も可能で，もしそうであれば，宇宙の一様等方性の考え方にインフレーションとは別の興味ある観点がもたらされることになる．これは，もし宇宙初期における光速度が現在の光速度より大きいとすれば，現在の地平線の内側に過去の因果的な領域を映し出す（図 3）ためであり，この方向での様々な試みが提案された．

c が時間に依存するとすれば，宇宙の発展方程式の中に $\dot{c}$ が含まれることになり，理論の局所的なローレンツ共変性が壊れることになる．共変性を保つ考え方の一つは，c がスカラー場 ψ を通して $c = e^{\psi} c_0$ (c_0：初期値) のように変化する場合である．この考え方は，ブランス–ディッケが変動する重力定数の模型のなかで提案した考え方と共通しており，e の変動もこの考え方を適用することができる．

次元をもつ普遍定数も動かし得るという考え方を受け入れてしまうと，(14) の右辺は様々な立場で意味付けることができるが，直接の観測に関わる左辺の値からは，それらを区別できない．しかし，左辺を右辺の変化から解釈することが，自然で物理的な理解を深めるのであれば，それ自体は意味のある手法に違いない．

---

*5) ディラックの大数仮説として有名であるが，先行する研究が数学者の H. ワイル（1917），ディラックの指導教官であった A.S. エディントン（1931）等によりなされている．

6. 普遍と不変

これまで，**普遍**を**時**と**場所**によらぬという意味で捉えてきたが，光の性質を考えると，もう一つの意味が浮かび上がる．アインシュタインは，光速度 c が慣性系によらぬ値を持つこと，および自然法則は慣性系によらず同一とする相対性原理をもとに，特殊相対性理論を作り上げた．これによれば，質量 m の粒子のエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の分散関係

$$(p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (mc)^2 \quad (p^0 = E/c) \qquad (16)$$

で結ばれる．この形は，明らかに空間回転の下で不変であり，図 4 の慣性系の（無限小ローレンツ）変換に対しても，$\delta p^2 = \delta p^3 = 0$ および

$$\delta p^0 = -\beta p^1, \quad \delta p^1 = -\beta p^0 \quad (\beta = V/c) \quad (17)$$

となることから，(16) の形は不変であるが，$E, \boldsymbol{p}$ は慣性系に依存して変化する．従って，“プランクエネルギーに比例する定数” という場合も，その大きさは観測者ごとに変わるのである．一方，c は (16) に不変かつ普遍な定数として組み込まれており，相対論的世界を支配する自然定数となっている．この意味での不変・普遍の性格をもつ自然定数は，他にも存在するであろうか．

いま，プランクスケールの定数 $\kappa = E_{\mathrm{P}}/c$ を使って無次元の運動量 $\tilde{p}^0 = \kappa^{-1}(E_{\mathrm{P}}/c)$ および $\tilde{\boldsymbol{p}} = \kappa^{-1}\boldsymbol{p}$ を導入し，$C(E, \boldsymbol{p}) \equiv \cosh(\tilde{p}^0) - \frac{1}{2}e^{\tilde{p}^0}\tilde{\boldsymbol{p}}^2$ を使って (16) を

$$\kappa^2(C(E, \boldsymbol{p}) - 1) = (mc)^2 \qquad (18)$$

で置き換える．(18) は，$\kappa \to \infty$ の極限で $E, \boldsymbol{p}$ の分散関係に帰着する．しかし，空間回転の下で不変であるが，ローレンツ変換 (17) の下では不変とはならない．ところがローレンツ変換自体を

$$\delta\tilde{p}^0 = -\beta\tilde{p}^1,$$
$$\delta\tilde{p}^i = \beta\left\{\delta^i_1\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{p}}^2}{2} + \frac{1-e^{-2\tilde{p}_0}}{2}\right) - \tilde{p}^1\tilde{p}^j\right\} \quad (19)$$

と修正すると，不変となってくる．(19) は，c と共に κ を不変定数として組み込んだ **κ-ポアンカレ変換**と呼ばれる変換で，$\kappa \to \infty$ の極限で (17) に帰着する．従って，実はローレンツ変換が近似形で，慣性系は κ-ポアンカレ変換を基に定義されるとすれば，エネルギーの次元をもつ定数 κc も c と同程度に基本的で，不変で普遍な自然定数となり得るのである．以上は，二重相対性理論[10)]と呼ばれる模型の中での観点であるが，普遍という意味を幅広い立場から定義できることに気付かせる．

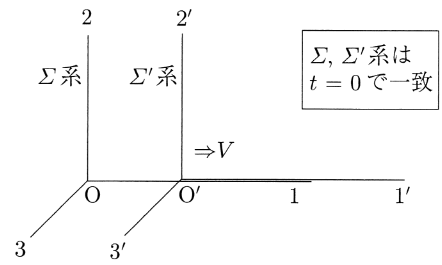


図 4　慣性系 Σ と Σ' の間のローレンツ変換．

7. おわりに

普遍定数は，それが次元をもつか否かに関わらず検証の対象となる変化を考えることに意味があるのだろうか．ダフは，(15) を $k\pi$ で割った無次元の形 $s = \pi = |\mu + \sqrt{\mu^2 - q^2}|^2$ $(\mu^2 = GM^2/\hbar c, q^2 = Q^2/\hbar c)$ で考えると，系の電荷が素電荷を単位として $Q = ne$ なら $q^2 = n^2\alpha^2$ と書けるため，熱力学第二法則からの制限は，やはり δe ではなく $\delta\alpha$ それ自体に関わるものであると考えた．ダフはさらに進めて，人間の定義が関与する次元をもつ普遍定数は，変化の評価自体に意味がないと主張した．これには直ちに反論が上がり，多くの論争を引き起こした[11)]．劣勢になったダフは，ディラックの見解を持ち出す．ディラックは，大数仮説の講演でなされた「宇宙質量/陽子質量 $\sim 10^{78}$ の変化を陽子の質量変化と捉えては？」という質問に，「できますよ．しかし，それは陽子の質量が変化するということにはまったくなりません．無次元の数に着目してそれが変化するかどうかを考えれば，それだけでよいのです[7)]」と答えている．

さて，冒頭に登場したファインマンに見解を聞くことができれば，どう答えるであろうか．

「止めときましょう．哲学を論じるのは，医者にとめられているんでね[12]」．

参考文献

1) 中村誠太郎・小沼通二編『ノーベル賞講演=物理学』第10巻，講談社（1978年）；R.P. ファインマン，江沢洋訳『物理法則はいかにして発見されたか』（ダイヤモンド社サイエンスブックス，1983年）．
2) 物理学史研究刊行会編『物理学古典論文叢書1（熱輻射と量子）』，非可逆な輻射現象について，東海大学出版会（1970年）．
3) L.B. Okun, *Sov. Phys. Usp.* **34(9)**, September, 1991.
4) M.J. Duff, L.B. Okun, G. Veneziano という個性の違う3人の物理学者が，基本的な自然定数に対するそれぞれの見解を述べている．ストーニーの単位系もこの中で紹介されているが，本稿では触れることのできなかった話題も含まれている，興味深い文献である．*Trialogue on the number of fundamental constants*, arXiv:physics/0110060v3[physics.class-ph].
5) 物理学史研究刊行会編『物理学古典論文叢書3（前期量子論）』，スペクトル線の量子論，東海大学出版会（1970年）；次の文献も参照してほしい．本特集号：「素粒子物理の相互作用—微細構造定数」（仁尾真紀子著）．
6) J.K. Webb *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), 884.
7) P.A.M. Dirac, *Nature*, vol.**139** (1937), 323. 次のディラック自身の講義でも，この考え方が述べられている：『ディラック現代物理学講義』（岡村浩訳），ちくま学芸文庫，筑摩書房（2008年）．
8) 本特集号：「基本定数の宇宙論的変動をめぐって」（藤井保憲著）参照．
9) P.C.W. Davies, T.M. Davis and C.H. Lineweaver, *Nature* **418** (2002), 602.
10) J. Kowalski-Glikman, Introduction to Doubly Special Relativity, *Lect. Notes in Phys.* **669** (2005), 131, [hep-th/0405273]（代表的な総合報告）．
11) M.J. Duff, *comment on time-variation of fundamental constants*, hep-th/0208093
12) ファインマンの言葉ではないが，このような場面で言いそうな言葉として，レナード・ムロディナウにより紹介されている：『ファインマンさん最後の授業』（安平文子訳），株式会社メディアファクトリー（2003）．

（なか・しげふみ，日本大学理工学部）

空間・時間・物質と次元

相対論から高次元時空へ

早田　次郎

1. はじめに

物理量を表現するための自由度は次元と呼ばれています．物理では，もともとは無関係だった次元が物理法則の発見によって互いに関連することがあります．例えば，**ニュートン方程式**

$$[\text{質量}] \times [\text{加速度}] = [\text{力}]$$

から，力の次元は [重さ・長さ/時間^2] のように表されますが，力の次元はもともとは独立なものだったはずです．逆に，物理法則の発見自体が，異なる次元を持った量の**同質性**を見抜くことによってなされたという事例もあります．マックスウェルが電場と磁場の同質性を見抜き，電場と磁場を統一する**マックスウェル方程式**を発見したことは典型的な例です．さらに，マックスウェルは電磁波の速さが真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 から $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と表されることを発見し，これが光の速さ $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ と数値的に一致していることから光は電磁波の一種ではないかという洞察を得たのです．このように，次元と物理法則は互いに深く関係しています．

ここでは，相対論における次元に話を絞ります．空間と時間の同質性の発見から始めて，どのようにして相対論が発見され，一見無関係に思える，長さ，時間，重さなどの次元が，お互いにどのように関係してくるのかを解説します．最後は，同質性の発見という観点から高次元時空にも話を拡げてみます．

2. 空間

物体の拡がりを比較することはできますから，そこにはもう長さという次元の概念が入っています．まず，図 1 のような直線的な拡がりを考えます．デカルトに従って，適当な点を原点 O として，そこから P 点までの距離（長さ）を P 点の座標として採用することにします．適当な単位（例えば m）を取れば，この直線上の点を数値化して 1 個の数 x_1 で表すことができます．このような空間を 1 次元空間と呼ぶことにしましょう．

次に，これを平面的な拡がりがある場合に拡張します．図 2 のような直交座標を用意してそれぞれの軸上の原点 O からの距離を使って，平面上の 1 点 P を表すことにします．この場合，2 つの方向がありますから，原理的にはそれぞれの方向に異なる‘長さ’の次元があっても不思議ではないはずです．しかし，実際には早くからこれらが同質なものであることは認識されていました．それはこの空間に回転対称性が存在するということに起因しています．図 3 のように，もともとの座標を (x_1, y_1) として，そこから θ だけ回転させた新しい座標を $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ と書くことにすると，それらの間には

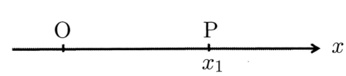


図 1　直線は長さの次元で表現できます．

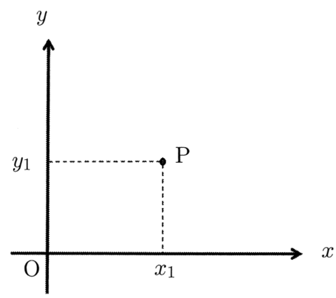


図2　2種類の長さを用意すれば平面上の点を表現できます．

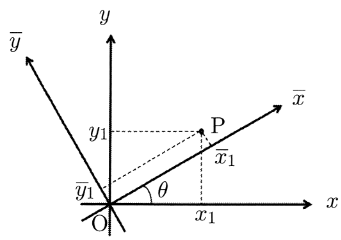


図3　回転するとそれぞれの軸の数値は変化します．

$$\bar{x}_1 = \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, y_1,$$
$$\bar{y}_1 = -\sin\theta\, x_1 + \cos\theta\, y_1$$

という関係があり，x_1 と y_1 は互いに混じり合います．明らかに，$\bar{x}_1 \neq x_1$ です．つまり，座標軸の選び方で x 軸上の原点からの距離というのは変わってしまいます．どちらの座標系が優れているというわけではなく，完全に同等だと考えることは妥当でしょう．そうだとすると，この回転でころころ変わるものに意味があるとは思えません．この回転に対して変わらないものは，空間の2点間の距離 Δl であり，

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

と表されます．ここで，Δx と Δy は2点の座標の差を表します．この公式は，ピタゴラスによって紀元前500年頃に発見されたと言われています．このように足し算ができるためには，x, y それぞれの方向の長さの次元が同じでなくてはいけないのです．この2つの方向の長さの次元の同一性の裏には，回転対称性を持った2次元ユークリッド空間の存在があると言えます．

これまでの議論を現実の3次元的な空間に拡張することはもはや難しくはないでしょう．3つの長さの次元を統一することで3つの同質的な空間的拡がりをもった3次元ユークリッド空間を表現することができます．このとき，意味のある距離はそれぞれの軸方向の3つの距離ではなくて，ピタゴラスの公式によって計算される2点間の距離のみです．もう気付いたと思いますが，同質な次元の数も‘次元’と呼んでいます．

3. アリストテレス的時空

時間という次元は長さに比べるともう少し抽象的です．時間は，物体の変化を記述するために形成された概念です．はっきりと目に見えるものではありませんから，空間とは明らかに異なるものだという認識があったことは当然だと言えます．

ここで，空間の点の概念の拡張として，**事象**を定義しましょう．事象とは，空間的にも時間的にも拡がりのない理想的な出来事とします．2つの事象が同じとは「2つの出来事が，同じ地点で同じ時刻に起こった場合」です．宇宙で起きるすべての事象の集合を**時空**，ある粒子が存在している間に起こるすべての事象の集合を**世界線**と呼ぶことにしましょう．

古代ギリシャの哲学者アリストテレスの自然観では，事象は空間の座標 (x, y, z) と時間 t で完全に指定され，時空は‘点’(x, y, z, t) と1対1に対応します．図4には，空間を1次元としたときの時空図が描かれています．t 軸は，$x = 0$ にいる観測者が経験するすべての事象の集合，すなわちその観測者の世界線です．そして，空間をすべて観測者で埋め尽くしたとき，x 軸はすべての観測者が $t = 0$ のとき経験する事象の集合です．2つの事象が空間の同一点で起こったかどうかは，2点が t 軸に平行な1本の直線上にあるかどうかで決まり，2つの事象が同一時刻に起こったかどうかは，2点が x 軸に平行な1本の直線上にあるかどうかで決まります．アリストテレスの世界観では，空間も時間も絶対的存在であり，観測者に依存せず

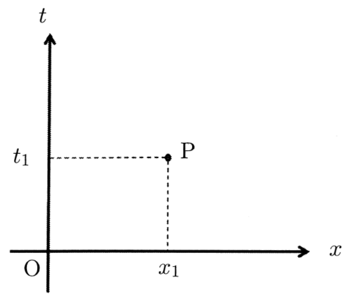


図4　事象Pは原点Oからの空間的距離 x_1 と時間 t_1 で指定できます．この場合，空間のときのように回転させることには意味がありません．

にそこに存在する何ものかということになっています．時間と空間はまさに次元の違う存在です．

4. ガリレイ的時空

アリストテレスは，**空間の絶対性**を仮定していました．つまり，京都大学の時計台がある‘場所’と言えば，絶対的な意味を持っていると考えていたわけです．しかし，互いに等速で運動する観測者は互いに同等だという，ガリレイの**相対性原理**の発見によってこれは間違いであることがわかりました．このことを理解するために，ある観測者の座標系で，x 方向に速さ v で運動している別な観測者を考えましょう．その観測者の静止系での座標 $\bar{x}$ と x の関係は，**ガリレイ変換**

$$\bar{t}=t\ ,\quad \bar{x}=x-vt$$

で与えられます．ガリレイ的時空でも，時間は絶対的です．このとき，どちらの観測者も同じ物理法則を観測するので両者を区別することはできない，というのが相対性原理の主張です．この帰結として，空間の絶対性は意味を失います．これは時空図を書いてみれば一目瞭然です．図5は，x 軸上に静止している観測者の時空図に相対速度 v で運動している3人の観測者の世界線を書き込んでいます．図中の p,q,r はアリストテレス的時空だとすると同一点です．ここで同時刻の点を結んだ線は x 軸に常に平行です．図6は，$\bar{x}$ 軸上に静止している観測者の立場で書いた時空図です．この場合 p,q,r は同一点ではないのです．このように，ガリレイ変換に対する不変性を要求するならば，2事象間の空間的な距離には意味がないことは明白でしょう．同時刻に起きた事象の間の空間的距離と2事象間の時間間隔にしか不変な意味がありません．

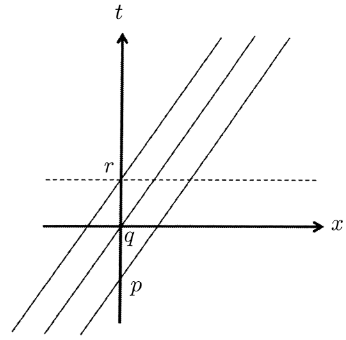


図5　p,q,r は x 軸上に静止している観測者にとっては同一点です．x 軸に平行に引いた点線は同時刻の点の集合を表しています．

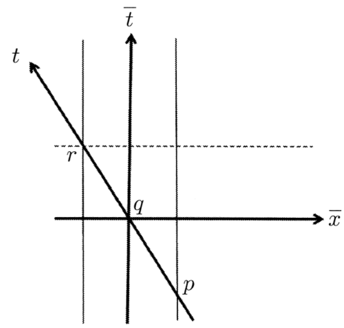


図6　p,q,r は $\bar{x}$ 軸上に静止している観測者にとっては同一点ではありません．$\bar{x}$ 軸に平行に引いた点線は同時刻の線です．

5. アインシュタインの発見

ガリレイによって相対性原理が発見され，絶対的な空間という概念は打ち壊されました．しかし，アインシュタイン以前には，時間はまだ絶対的な地位を保っていました．その**絶対時間**という概念もアインシュタインが**同時性の破れ**を発見したときに終わります．この発見は，**光の速さが観測者によらずに一定**という事実の論理的な帰結です．

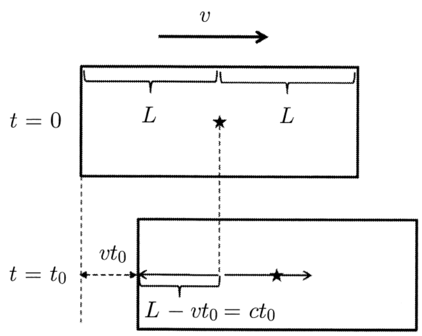


図 7　上の図は $t=0$ に光が発射した瞬間を表し，下の図は光が箱の後方に $t=t_0$ 秒後に到達した様子を表しています．箱が運動しているために，箱の後方は光源（星印）に近づき，箱の先端は光源から遠ざかります．そのため，外の観測者から見た場合光は同時に箱の両端に到達することはありません．

このことを理解するために以下のような実験を考えましょう．図 7 のように速さ v で運動する箱の中心から光を発射して両端に到達する時間を測定します．箱の中にいる観測者は，光が箱の前と後ろに同時に到達するのを観測するはずです．一方，光の速さが観測者に依存していないということを認める限り，外にいる観測者は光が箱の後ろ側に早く到達することを観測するはずです．つまり，ある観測者には同時に起きる 2 つの事象が別な観測者にとっては同時ではないということになります．これが何を意味するのかを明らかにするために，ある慣性系での同時刻の定義の仕方をはっきりさせましょう．光の速さが特別な意味を持っていることは明らかですから，$c=1$ となるような単位系が便利です．そこで，1 s を，その間に光の速さで走ることのできる距離 3×10^8 m として定義します．この定義のもとでは，$c=1$ で，光の世界線は時空図の中で常に 45 度の傾きを持った直線になります．図 8 で，$\bar{t}=0$ と同時刻の点は，時刻 $-a$ に原点から発射された光がそこで反射されて時刻 a に原点に戻ってくるような点として定義されます．a を変化させていけばその軌跡として $\bar{x}$ 軸を描くことができます．今度は同じことを別な慣性系の時空図上で実行します．$\bar{t}$ 軸は速さ v で走っている観測者の世界線ですから $x=vt$ の直

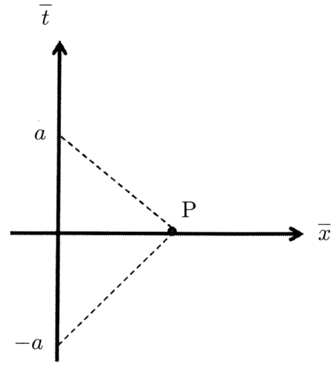


図 8　光を使った同時刻の定義の仕方を示しています．同時刻の点の軌跡が $\bar{x}$ 軸です．

線上にあることは明らかです．同時刻の定義に従うと，$\bar{t}$ 軸上で $-a$ の時刻に原点から発射された光がそこで反射されて時刻 a に原点に戻ってくるような点が $\bar{x}$ 軸になります．光の世界線が 45 度の直線であることに注意すると，図 9 が得られます．この図をもとに，簡単な計算をすると，$\bar{x}$ 軸は $t=vx$ 上にあることが分かります．ゆえに，変換は線形であり，

$$\bar{t}=a(v)\,(t-vx)\ ,\quad \bar{x}=b(v)\,(x-vt)$$

のように書くことができます．本当は $a(v)$ と $b(v)$ が v の大きさにしかよらないことを証明する必要がありますが，ここではそれを認めてください．

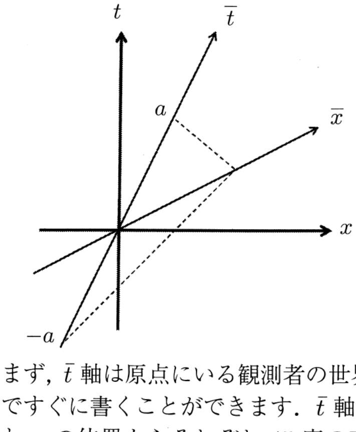


図 9　まず，$\bar{t}$ 軸は原点にいる観測者の世界線なのですぐに書くことができます．$\bar{t}$ 軸上の $-a$ と a の位置からそれぞれ 45 度の直線を引いて交点を求めると $\bar{x}$ 上の 1 点が求まります．これを a を変えながら繰り返すと $\bar{x}$ 軸が描けます．

すると，逆変換は

$$t = a(v)\,(\bar{t} + v\bar{x})\ ,\quad x = b(v)\,(\bar{x} + v\bar{t})$$

なので，これら 4 つの式から $\bar{t}, \bar{x}$ を消去して，t と x の係数を比較すると $a(v) = b(v) = 1/\sqrt{1-v^2}$ が得られます．この変換は，**ローレンツ変換**と呼ばれていて，c をもとに戻してやると

$$\bar{t} = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\quad \bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

という式で与えられます．v が光の速さに比べて十分小さいときは，ローレンツ変換はガリレイ変換と区別がつかないことがわかります．相対性原理から，この変換のもとで物理は不変であること，すなわちローレンツ対称性があることが言えます．ここで強調したいことは，この変換で時間と空間が混じってしまうということです．ここに，ローレンツ不変性を持った **4 次元ミンコフスキー時空**が誕生します．アインシュタインは，時間と空間の同質性を発見したのです．

ミンコフスキー時空で意味があるのは，ローレンツ変換で不変な距離

$$\varDelta s^2 = -c^2 \varDelta t^2 + \varDelta x^2 = -c^2 \varDelta \bar{t}^2 + \varDelta \bar{x}^2$$

です．特に，$\varDelta s^2$ の符号はローレンツ変換に対して不変な性質です．$\varDelta s^2 > 0$ のときは，光の速さ以上でないと到達できないことがわかります．光より速いものはないので，これは不可能です．このとき，2 つの事象は**空間的**に離れているといいます．2 つの事象間の距離が**光的** $\varDelta s^2 = 0$ ならば光でしか到達できません．$\varDelta s^2 < 0$ ならば**時間的**につながった 2 つの事象です．絶対時間はありませんが，この意味での因果関係はあります．

こうやって発見された理論的枠組みは**特殊相対性理論**と呼ばれています．この理論の帰結として，質量とエネルギーの等価性が導かれることは有名な話です．

6. 4 次元時空と重力

4 次元時空の本当の意味は重力まで考えたときに初めて明らかになります．ここで大きな役割を果たすのが，慣性質量と重力質量が等しいという**等価原理**です．この原理のため，重力場のもとでの運動は物体の質量に依存しない普遍的なものになります．また，重力場は局所的には完全に消し去ることができることも，自由落下するエレベーターの中では無重力になることからわかります．この局所的には重力を消し去ることができるという事実は，空間のある微小な領域が常に平坦であるということと似ています．等価原理とあわせて考えると，物体の運動を曲がった時空上の測地線として表現するというアイデアが思い浮かびます．ただし，曲がっているのは時空であって，空間ではありません．例えば地上で粒子を投げ上げたときの運動を考えてみましょう．高校の物理では，投げ上げの速さを v として，時刻 t における高さ h は $h = vt - gt^2/2$ で与えられることを教わります．ここで，$g \fallingdotseq 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ は重力加速度です．投げ上げても重力によって落ちてくるという，日常経験している事実を説明しています．これを空間が曲がっているということで解釈しようとしたら，小さな曲がりですまされないことは明らかです．しかし，曲がっているのが空間ではなくて時空だとしたらどうでしょう．ここで $1\,\mathrm{s}$ が $3 \times 10^8\,\mathrm{m}$ であったことを思い出しておく必要があります．ものを投げ上げて落ちてくるまでの時間は数 s で，距離はせいぜい数 m なので，時空図の中にこの粒子の軌道を書きこむと，その世界線はほとんど直線になっていることがわかるでしょう．重力は弱く，粒子の世界線はほんの少しだけ曲がった時空上の測地線と解釈できる，と考えるのは至極妥当です．実際，アインシュタインはこのような考えで**一般相対性理論**にたどり着くことができたのです．

平坦な時空の計量は，4 次元座標を $x^\mu = (ct, x, y, z)$ として

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と表すことができます．ただし，$\eta_{\mu\nu}$ は，$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ という対角行列です．和の記号

は省略しても，添え字が2度繰り返されていることから和を取っていることがわかるので書かないことにします．これはアインシュタインが使った約束事です．時空が曲がると計量が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu$$

のようにもっと一般的になります．この計量は，**アインシュタイン方程式**

$$[\text{時空の曲率}] = G \times [\text{質量密度}]$$

によって決定されます．左辺の曲率は $g_{\mu\nu}$ から計算される量で，$G = 6.674 \times 10^{-11} [\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$ はニュートンの万有引力定数です．アインシュタイン方程式を解くと質量 M の星の外部の計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 \\ &+ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 \\ &+ r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \end{aligned}$$

のように表されることがわかります．ここに現れる $r_{\mathrm{G}} = 2GM/c^2$ は重力半径と呼ばれています．r が違う点では長さが違いますから時空は曲がっています．この表式からわかるように，4次元時空で重力を表現しようとするとき便利な単位系は $c = G = 1$ です．この単位系では，$r_{\mathrm{G}} = 2M$ となり，質量も長さの次元で表すことができることになります．例えば，太陽の質量は $1.476 \times 10^3\,\mathrm{m}$ です．

一般相対性理論以前は，時空は固定された入れ物にすぎなかったわけですが，重力を考慮すると，物質によって歪められることがわかったのです．次元解析を使うと，今の場合，曲率 $\simeq 1/r^2$，物質の質量密度 $\simeq M/r^3$ なのでアインシュタイン方程式より $r \simeq M = r_{\mathrm{G}}$ が特徴的な曲率半径となります．こうして，長さと重さの次元の結び付きが自然に生じてくるのです．

7. 高次元の時空へ

現代では電磁場 $A_\mu(x^\mu)$ は**ゲージ場**の一種であると理解されています．ゲージ場は**ゲージ対称性**と呼ばれる内部対称性を持っています．我々になじみの深い電磁場は $U(1)$ 群を内部対称性として持っています．内部対称性は新しい物理を表現するための次元です．弱い相互作用と電磁気力の統一理論では，この内部対称性は $SU(2) \times U(1)$ になります．エネルギースケールを上げていくと，対称性が高くなる，つまり，次元が高くなるわけです．逆にエネルギーが下がっていくと，**対称性の自発的な破れ**が起こり，我々の世界を記述する理論が得られます．現実には存在しないと思われるような対称性の高い世界は電磁場と $SU(2)$ ゲージ場の同質性を見出すことで発見されたのです．

一方で，カルツァとクラインによると，電磁気力は5次元の重力理論から導かれます．5次元の計量を

$$\begin{aligned} ds^2 = &\; g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu \\ &+ (dw + A_\mu(x^\mu)dx^\mu)^2 \end{aligned}$$

のように書き，5次元のアインシュタイン方程式を書くと4次元のアインシュタイン方程式と電磁場の方程式の両方が現れます．ここで w は5次元目の次元の座標です．これは見えてはいけないので小さくまるまって（**コンパクト化**）S^1 になっていなくてはなりません．エネルギーが高くなるとこのコンパクト化は重要でなくなり，5次元のすべての方向が同質な5次元時空が現れます．逆にエネルギーが低くなるとコンパクト化が重要となり，4次元時空に電磁場があるという描像になります．これは素粒子の自発的対称性の破れと全く同じ考え方です．**高次元時空**は，4次元時空と**余剰次元**の同質性を伴います．このように，異なる次元をもつ物理量の間の関係の発見は新しい概念の発見と深く関係しています．未だよく理解されていない量子重力理論にはどのような未知の概念が隠されているのか興味深いことです．

（そうだ・じろう，京都大学大学院理学研究科）

宇宙の中の階層のつながり
マクロな次元



森川　雅博

概要

宇宙の中の様々な階層構造の広がりとそれらのつながりを見ていこう．物理の基礎方程式はこれらを整合的に記述する．次元や単位を考えながら，系の置かれている環境を考え合わせると，それら階層構造が見えてくる．

1. 階層の広がり

宇宙の階層構造を，ミクロからマクロに向かってまず概観していこう．

1.1 ミクロの階層（波動関数）

宇宙で光を放っているのは大半が水素ガスである．その水素ガスは水素原子の集まりである．水素原子は陽子と（逆電荷を持つ）電子でできているが，これらが合体して潰れてしまわないことを保障しているのが，量子力学である．量子力学の基礎方程式は，波動関数 $\psi(t,x)$ に対して

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(t,x) \quad (1)$$

と書け，これはシュレジンガー方程式と呼ばれる．ここで $V(x)$ はポテンシャルで，$\hbar \approx 1.1\times10^{-34}$ Js．この偏微分方程式を精密に解いていくのは省略して，ここでは「次元」を大切にして代数方程式にして解析しよう．つまり，$\partial \to 1$ として大きさつまり「およその広がり」だけを考える[1][*1]（完全な等式ではないので準等式「≈」を使おう）：

$$\hbar\frac{\psi}{t}\approx\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi}{x^2}+V\psi. \quad (2)$$

まずポテンシャルのない一般の場合，この式 (1) の左辺と右辺（第 1 項）が釣り合う．すると，

$$\frac{mx^2}{t}\approx\frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

となり，これは時間の広がり (t) と空間の広がり (x) を規定する．一方，良く知られた運動量 p のおよその広がりは $p \approx mx/t$ なので，式 (3) は正準変数の関係として簡潔に

$$xp\approx\frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

と書かれる．あるいは良く知られたエネルギーは $E \approx p^2/(2m)$ なので，同じ式は

$$Et\approx\frac{\hbar}{4} \quad (5)$$

とも書ける[*2]．これらは**不確定性原理**と呼ばれ，量子論の基礎原理だと言われるぐらい有用である．

式 (3)，(4) は一塊の ψ に対する記述であるが，力が加わると ψ は「節」を作ることによって複数個の塊が結合することができ，それぞれに対してこれらの式が成り立つ（図 1）．従ってこれらの式の右辺には一般に整数因子 n が入る：$xp \approx n\hbar/2 > \hbar/2$．量子力学はこのような「**量子**」を記述する物理である．

以上は，ポテンシャルを特に指定しない一般の関係であった．引力であるクーロン力ポテンシャル

*1）$\partial \to \triangle$ として，差分と考えても良い．およその大きさを問題にしているので虚数単位 i や符号も考えない．また表式の数値因子も正確ではない．

*2）座標 t, x をフーリエ変換して対応する変数をそれぞれ ω, k と書くと，t の広がりは ω の広がりの逆数，x の広がりは k の広がりの逆数なので，（係数を別にして）$E \approx \hbar\omega$, $p \approx \hbar k$ などとなる．特に光の場合，その波長は $\lambda \approx c/\omega \approx c\hbar/E$ となる．

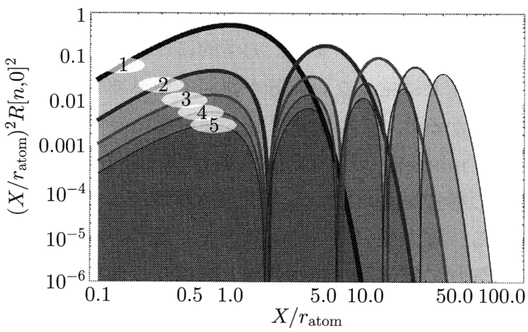


図 1　水素原子の動径方向の広がり．基底状態から順に 5 番目までの励起状態のうち，球対称な波動関数による電子の存在確率を重ねて描いた（励起順に細くなる実線で，番号も付けた）．波動関数はエネルギー順位が上がることに節を作って複数個の「量子 $\hbar/2$」を獲得していく．もっと正確には（調和振動子の場合は明快だが）節の数に関しては角度方向の波動関数の広がりも考えなければならない．

$$V = \frac{k_0 e^2}{x} \tag{6}$$

を考えると，系は次元を持った量（$k_0 = 9.0 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$, $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$）によって特定のスケールが決まる．この式 (6) を入れた式 (2) を考え，各項がバランスすると

$$\begin{aligned} E_{\rm atom}(\equiv E) &\approx -\frac{3e^4 k_0^2 m_{\rm e}}{2\hbar^2} \approx 6.5 \times 10^{-18}\,\mathrm{J}, \\ r_{\rm atom}(\equiv x) &\approx \frac{\hbar^2}{2e^2 k_0 m_{\rm e}} \approx 2.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{7}$$

となる*3)（ただし，$m_{\rm e}$ は電子の質量）．これから，典型的な質量密度は

$$\rho_{\rm atom}\left(\equiv \frac{m_{\rm p}+m_{\rm e}}{4\pi x^3/3}\right) \approx \frac{6e^6 k_0^3 m_{\rm e}^3 m_{\rm p}}{\pi\hbar^6} \approx 2.2 \times 10^4\,\mathrm{kg/m^3} \tag{8}$$

となる（$m_{\rm p}$ は陽子の質量）．これが**水素原子**という構造の広がりである．

少し一般に，不確定性の式 (3), (4) 右辺に整数因子 n が入る場合，$E_{\rm atom} \approx -3e^4 k_0^2 m_{\rm e}/(2\hbar^2 n^2)$ などとなる（図 1）．この整数 n が別の整数 m に変化することによって原子から光が出てくる．その波長はエネルギー差 $(n^{-2} - m^{-2})3e^4 k_0^2 m_{\rm e}/(2\hbar^2)$ から脚注 *2) によって，宇宙どこでも普遍的な基本定数 $(e, k_0, m_{\rm e}, \hbar, c)$ から決まる特定の波長を持つ．この波長のずれや広がりによって*4)，我々は限られた地球からの観測によってでも，深宇宙の物質の様子がわかるのである．

1.2 星（バリオン）

この水素ガスが重力で集まって星という構造を作る．ガスを構成する粒子（質量 m）に対する運動方程式は重力ポテンシャル ϕ によって決まり，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\nabla\phi, \tag{9}$$

と書けるが，重力は物質の質量密度 ρ で決まり，

$$\triangle\phi = 4\pi G\rho \tag{10}$$

である（$G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$）．1.1 節での議論と同様に準等式にしてしまうと，それぞれ，

$$\frac{x^2}{t^2} \approx \phi, \quad \phi \approx \frac{4\pi GM}{x} \tag{11}$$

となる．前者は運動量 p を用いて，

$$2\frac{p^2}{2m} \approx m\phi \tag{12}$$

となる．これは運動エネルギー（の 2 倍）とポテンシャルエネルギーの釣り合いを表し，一般に**ビリアル定理**と呼ばれている．さて，式 (11) から，ϕ を消去して，重力系としてのエネルギー

$$E_{\rm gr} \approx \frac{4\pi GM^2}{x} \tag{13}$$

を得る．この $E_{\rm gr}$ が全体の電磁的エネルギー $(M/m_{\rm p})E_{\rm atom}$ と釣り合って構造ができる．この構造の質量を M, 大きさのスケールを R としよう．この釣り合いの式 $E_{\rm gr} = \frac{M}{m_{\rm p}}E_{\rm atom}$ の左辺に $x \to R$ として式 (13) を，右辺に式 (7) を用い，さらに $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_{\rm atom}$ に式 (8) を用いて，M, R について解くと，

$$\begin{aligned} M_{\rm pl} &\approx \frac{3\sqrt{3}e^3 k_0^{3/2}}{8G^{3/2}m_{\rm p}^2} \approx 1.5 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}, \\ R_{\rm pl} &\approx \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{4e\sqrt{G}\sqrt{k_0}m_{\rm e}m_{\rm p}} \approx 2.5 \times 10^7\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

となる．この構造は**惑星**と呼ばれ，その典型は木星である．

さらに，陽子どうしが接近して，式 (5) からエネルギー $E \approx \hbar/t$ が陽子のエネルギー $E_{\rm nf} \approx p^2/(2m_{\rm p}) \approx \hbar^2/(2x^2 m_{\rm p})$ 程度になると核融合でエネルギーが湧出

*3)　前の係数まで正確な値は出ないが，これらはそれぞれリュードベリエネルギー単位，ボーア半径を与える．以下同様．

*4)　ずれから電磁場の強さ，広がりから周辺ガスの温度や密度，流れなどがわかる．

する[*5)]．陽子に対して式 (1), (6) の各項のバランスを電子のときと同様に評価すると，E_{nf}, x として，式 (7) で $m_{\mathrm{e}} \to m_{\mathrm{p}}$ としたものが得られる．このエネルギー E_{nf} の全体が重力エネルギー E_{gr} と釣り合う構造ができる．$(M/m_{\mathrm{p}})E_{\mathrm{nf}} \approx E_{\mathrm{gr}}$ から前と同様の議論によってこの構造のスケールは，

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{star}} &\approx \frac{e^3 k_0^{3/2}}{8\pi^{3/2} G^{3/2} m_{\mathrm{e}}^{3/2} \sqrt{m_{\mathrm{p}}}} \\ &\approx 4.1 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}, \\ R_{\mathrm{star}} &\approx \frac{\hbar^2}{4\sqrt{\pi} e \sqrt{G} \sqrt{k_0} m_{\mathrm{e}}^{3/2} \sqrt{m_{\mathrm{p}}}} \\ &\approx 3.6 \times 10^{8}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{15}$$

となる．この構造は**恒星**と呼ばれ，その典型は太陽である．$E_{\mathrm{nf}} \gg E_{\mathrm{atom}}$ なので高温のため，構成分子は電離しプラズマ状態を作っている．一般にプラズマ状態の天体は宇宙のいたるところに存在する．

ちなみに，式 (3) から決まる速度を光速度 $x/t \to c$ として最密構造を作れば，$m \to m_{\mathrm{e}}$ なら**白色矮星**，$m \to m_{\mathrm{p}}$ なら**中性子星**という構造ができる．これらは構成各粒子の波動関数が重なり合った凝縮状態を作っている．

また，純粋に重力を考え，式 (11) から，最密構造 $v \to c$ を考えると**ブラックホール**が作られる．その特徴的なスケールは

$$r_g (\equiv x) \approx \frac{GM}{c^2} \tag{16}$$

となる．これをブラックホールの半径と呼ぼう．

1.3 銀河（暗黒物質）

このような恒星の集団が作る構造が**銀河**である．この構造は式 (9) の重力が支配している．ただし回転しているので，角速度を ω として大雑把に $x \approx \cos(\omega t)$ だから，式 (9) の左辺は，$-m\omega^2 x$ となる[*6)]．負号が付いているので，x が大きいほど大きく遠方に向かう力として効く．これを右辺の力（引力）と区別して見かけの力と呼ぶ．これらから，遠方に向かう力と重力（引力）がバランスして

$$v^2 \approx 4\pi G M x^{-1} \tag{17}$$

となるはずであることがわかる．しかし実際には，速度は遠方で x^{-1} の振舞いをせず，銀河の端までほとんど定数である．つまり，力学的には恒星や水素ガスでない光では見えない成分が銀河では卓越していることが分かる[2)]．この成分は誰も知らないので**暗黒物質**（dark matter，以下 DM）と呼ばれている．つまり，銀河の構造を決めている主役が何かわかっていないのである．重力はいくらでも遠方まで効くので，銀河たちは群れて**銀河団**や**超銀河団**と呼ばれる塊を作る．これらが宇宙全質量の 2 割強を占めていることが分かっている[2)]．

1.4 宇宙（暗黒エネルギー）

宇宙を支配しているのも重力である．半径 x の領域に一様に質量 $M(= 4\pi x^3 \rho/3)$ の物質が詰まっているとしよう．すると，式 (9), (10) から，

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G\frac{M}{x^2} \tag{18}$$

となる[*7)]．これは両辺に dx/dt を掛けるとすぐ積分できて，$(dx/dt)^2 = 2GM/x + \mathrm{const.}$ となる．密度に直すと，**宇宙膨張**を記述する式

$$\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{x}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\mathrm{const.}}{x^2} \tag{19}$$

となる（フリードマン方程式）．右辺第 2 項は空間曲率を表すが，これは観測からほとんど 0 なので以降無視しよう．これから

$$x^3 \approx 2GMt^2 \tag{20}$$

となるので，宇宙における長さの指標は

$$x \approx (2GM)^{1/3} t^{2/3} \tag{21}$$

と膨張することがわかる[*8)]．これは普通の物質の場合だが，物質よりも光が卓越している場合は，膨張に伴って光の波長も伸び，脚注 *2）によってエネルギーが逆比例するので，$4\pi x^4 \rho/3$ が一定に保たれる．すると光が卓越する場合は宇宙の広がりの指標は，

$$x \approx (2GM)^{1/4} t^{1/2} \tag{22}$$

となる．式 (21), (22) から一般に，宇宙初期には光が卓越し，そのうち普通の物質が卓越してくる．この様子は図 2 を参照してほしい．

---

*5） さらに接近するとクーロンポテンシャルの山がどんどん大きくなってしまう．量子力学では，このポテンシャルを超えていくことができる．この量子論に特有な現象を**トンネル効果**という．

*6） これは式 (32) にも現れている．

*7） 準等式に基づく議論を展開するので数係数などはあまり気にしないことにしよう．

*8） 同じ構造が太陽系の力学にも成立し，これはケプラーの第 3 法則「公転周期の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例する」を表す．

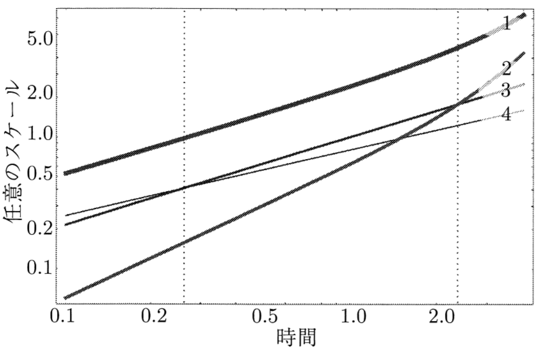


図 2 宇宙膨張の様子．縦軸・横軸は任意単位の大きさ・時間．実線は 1：全要素，2：暗黒エネルギー，3：物質，4：輻射．4, 3, 2 の順に宇宙を凌駕していく．従って宇宙は $t^{1/2} \to t^{2/3} \to e^{\mathrm{const}.t}$ へと膨張の様子を変えていく．この移り変わりの節目を点線で示した．

最近の様々な観測から，膨張しても薄まらない特別なものが宇宙全質量の 7 割強を占めていることが示唆されている[2)]．正体が不明なので**暗黒エネルギー**（dark energy，以下 DE）と呼ばれる．この場合，密度が常に一定値 ρ_{DE} なので，式 (19) から

$$\frac{1}{t^2} \approx \frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{DE}} \tag{23}$$

となる．これでは t しか決まらず，x は不明である．しかし，もとの式 (19) の左辺の意味は，$(d\ln x/dt)^2$ なので，

$$\left(\frac{\ln x}{t}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{DE}} \tag{24}$$

とするべきである．すると，

$$x \approx \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{DE}}}\, t\right) \tag{25}$$

となり，宇宙は鼠算的膨張，つまりどんどん**加速して膨張**していく．

宇宙の膨張をまとめると，初期宇宙だけは輻射が膨張（式 (22)）を決めていたが，後のほとんどの時間は物質が膨張を決めている（式 (21)）．現在は，指数関数的膨張（式 (25)）を始めつつある．ところで，宇宙の地平線が光速度で広がっていった（$x_0 \approx ct_0$）のであれば，式 (21) から，$x_0 \approx GM/c^2$ となる．つまり式 (16) と比較して，我々は宇宙という「**ブラックホールの渕**」にいることになる：$x_0 \approx r_g$．

2. 階層のつながり

今まで見てきた様々な階層は単に存在しているだけではない．階層はお互いに繋がっていて，同じ物理が背景にある場合が多い．今度はスケールを下りながら，今まで見てきた階層のつながりを検討していこう．

2.1 暗黒族のつながり——凝縮場

暗黒 XX と呼ばれる正体不明の存在が宇宙の骨格を形成しているという謎の解明は，現在の宇宙論の最優先問題である．特に属性が全く異なるこれら 2 成分（DM, DE）がそれぞれ 2 割および 7 割，宇宙スケールで見て現在同じ程度に存在していることこそ謎である．あたかも両者は同じ存在の異なる表現であるかのようである．実際，これらは一つの軽いボーズ粒子（質量 m）のガスの状態（DM）と**量子凝縮**した状態（DE）であるという考えがある．その系は温度 T の熱平衡にあり数密度 n を持つ．その量子凝縮は，古典的凝縮場 $\psi(t,\vec{x})$ に対して

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V\psi + g\,|\psi|^2\,\psi. \tag{26}$$

と書かれ，これは Gross–Pitaevskii 方程式と呼ばれる[3)]．$V(\vec{x})$ は一般のポテンシャル，また $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ であり，a は s-波散乱長と呼ばれる[*9)]．

この式の骨格はポテンシャル $V(\vec{x})$ にも g にもよらず，単に左辺と右辺第 1 項から決まる式 (3) と同型の関係であるが，温度 T によって各粒子の平均エネルギー（$E \approx k_{\mathrm{B}}T/2$）が，従って $\psi(t,\vec{x})$ の広がり（熱的ド・ブロイ波長）が規定されている（$k_{\mathrm{B}} = 1.4\times10^{-23}$ J/K はボルツマン定数）．つまり，式 (4), (5) を辺々乗じて，$E \to k_{\mathrm{B}}T$ とすれば，

$$x \approx \frac{\hbar}{\sqrt{mk_{\mathrm{B}}T}} \tag{27}$$

が得られる．一方，数密度 n から決まる自然なスケール（平均分子間距離）

$$x \approx n^{-1/3} \tag{28}$$

がある．後者 (28) が前者 (27) より大きければ，単に古典的なガスだが，前者が大きければ全系は波動関数の重なり合った大きな量子凝縮体となる．この境界がガス相と凝縮相の臨界温度を決める．それは式 (27), (28) を等置して求められ，

*9) シュレジンガー方程式と良く似ているがここで $\psi(t,\vec{x})$ は波動関数でなく古典的な場．

$$T_{\rm cr} \approx \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{k_{\rm B} m}. \tag{29}$$

となる．宇宙の物質温度がこれを境に，古典的なガス（DM と同定）であったり凝縮体（DE と同定）であったりする．宇宙の凝縮相が効いているとすると，加速していく宇宙モデルが自然に作れる[4)]．

一方，凝縮体はどんな局所構造を作るのだろうか？局所的に密度が大きくなると今度は温度より重力ポテンシャル $V = m\phi$ が効いてくるだろう．式 (26) によって，この重力を量子力学的な力が支える構造が得られる．式 (11) から，速度が大きいほど大きな質量を持てるので，その極限 $v \to c$ を考えよう．すると，最大質量（カウプ限界質量）は

$$M_{\rm kaup} \approx \frac{\hbar c}{8\pi G m} \tag{30}$$

と決まる．質量がこれを超えるとサイズがさらに小さくなり，ブラックホールとならざるを得ない．例えば $m \approx 10^{-5}\,{\rm eV}$ のとき，$M \approx 10^{-5} M_\odot$ となり，これは地球程度の質量である．従って，宇宙にはブラックホールがごろごろあっていいかもしれない．

実際，あらゆる銀河はその中心に $10^{6\sim8} M_\odot$ という**非常に重いブラックホール**を宿していることがわかっている．銀河が先にできたのか，あるいはこの非常に重いブラックホールが先なのか，現在大きく議論されている[5)]．

2.2 長距離力系のつながり——重力系とプラズマ

天体をまとめているのは重力であり，主たる物質の存在形態はプラズマである．両者は**長距離力系**として密接な関係があるので比較してみよう．重力は，式 (9)，(10) あるいはそれから出る式 (11)，電子ガスなどのプラズマは，式 (6) から決まる．従って，

$$Gm^2 \to -ke^2 \tag{31}$$

という解析接続で両者はお互いに関係が付く．プラズマ，自己重力系の両分野で重要な意味を持つ，エネルギー，長さ，時間はそれぞれ対応している．電子ガス系の温度 T には，1 粒子あたりの運動エネルギー $m\left\langle v^2 \right\rangle$ が対応する．プラズマ中ではクーロン力が遮蔽されおよそ**デバイ長** $\lambda_{\rm D}$ までしか到達しない．この重要な長さスケールは自己重力系では，系の構成粒子のランダム運動に抗して重力的に収縮していく臨界距離，つまり**ジーンズ波長** $\lambda_{\rm J}$ に対応している．また，プラズマ中での電荷の引き合いによる振動の特徴的な**プラズマ振動数** $\omega_{\rm P}$ は，自己重力系では，粒子が重力に引かれて落下するまでの特徴的な**自由落下時間** $\tau_{\rm ff}$ の逆数に対応している．これらは表 1 にまとめた．

表 1 プラズマ（電子ガス）系と自己重力系の重要な諸量の関係．2 乗して絶対値で比較している．式 (31) の負号から，実数の長さであれば純虚数になるが，これは解析接続から安定性（振動）と不安定性（一方的時間発展）に対応している．

プラズマ系	自己重力系
$m\frac{d^2x}{dt^2} = k\frac{e^2}{x^2}$	$m\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{m^2}{x^2}$
温度 T	速度分散 $m\langle v^2\rangle$
デバイ長	ジーンズ波長
$\lambda_{\rm D}^2 = \frac{k_{\rm B}T}{4\pi kne^2}$	$\lambda_{\rm J}^2 = \frac{\sigma^2}{4\pi Gmn}$
プラズマ振動数	自由落下時間$^{-1}$
$\omega_{\rm P}^2 = \frac{4\pi kne^2}{m}$	$\tau_{\rm ff}^{-2} = 4\pi Gmn$

特に，銀河の集合具合を表す **2 点相関関数**は，プラズマのそれと対応していることもわかる：$\xi(r) \approx \exp[(3r/\lambda_{\rm J})^{-1}\cos(r/\lambda_{\rm J})] - 1$．また，自由エネルギーの虚部が**力学的緩和時間**に対応したりする[6)]．

2.3 磁場のつながり——渦とスケーリング

宇宙にあまねく存在する磁場は，プラズマ流体の回転渦運動から生じる（**ダイナモ機構**）．その基本方程式は回転する流体の Navier–Stokes 方程式に（電気伝導の大きな）電磁相互作用などを考え合わせた複雑なものである[7)]：

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v = -\nabla\left(p - \frac{1}{2}\rho|\Omega\times r|^2\right) + \rho\nu\triangle v + \rho g - 2\rho\Omega\times v + \left(\frac{1}{\mu}\nabla\times B\right)\times B, \tag{32}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) + (\mu\sigma)^{-1}\triangle B. \tag{33}$$

ここで，p は圧力，ρ は質量密度，ν は粘性係数，μ は透磁率，Ω は回転角速度，g は重力加速度，σ は電気伝導度，などである．これだけでは，何が系をコントロールしているのか全く分からない．だからまず地球の場合（地磁気）に特化して考察してみよう．地球中心には電気伝導度の大きな流体鉄のコアがあって，この流れが作る対流渦が地磁気を作っていると考えられる．上記の方程式の各項に対して，観測や状況証拠から，

$$\left|\frac{(v\cdot\nabla)v}{\nu\triangle v}\right| \approx 10^8, \tag{34}$$

$$\left|\frac{(-2\Omega\times v)}{\nu\triangle v}\right|\approx 10^{14} \tag{35}$$

などであることが分かっているので，寄与の大きい項を取り込むことにしよう．特にコリオリ力によっていたるところで渦ができているだろう．その渦のサイズを γ，数を N として，これらのパラメターが地磁気を特徴付けていると考えてみよう．上のベクトル方程式を動径方向と角度方向に分けたとき，渦に寄与するのは角度方向成分である．

まず式 (33) を定常な状況で考えると，磁場 B によらず

$$v\approx(\gamma\mu\sigma)^{-1} \tag{36}$$

となる．また式 (32) において，角度方向で特に寄与する 2 つの項がある．つまり，$-2\rho\Omega\times v$ と $((1/\mu)\nabla\times B)\times B$ の釣り合いを考えると，地球内部での磁場は

$$B_{\rm in}\approx\left(2\rho\Omega v\sigma^{-1}\right)^{1/2} \tag{37}$$

となる．磁束密度の保存から，地表での磁場は（地球半径を R として）

$$B_{\rm out}=\left(\frac{\gamma}{R}\right)^2 NB_{\rm in}, \tag{38}$$

となるので，これはまとめて

$$B_{\rm out}=N\gamma^2R^{-2}\left(\frac{2\rho\Omega}{\sigma}\right)^{1/2} \tag{39}$$

であることが分かる．この量の比をいろいろな天体の磁場についてまとめてみると図 3 のようになる．大体一つの直線上に乗っている．この直線の傾きから，式

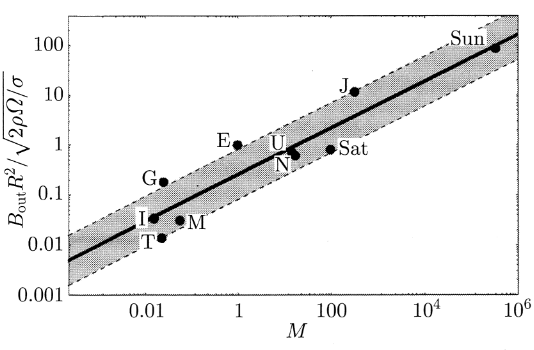


図 3 天体の規格化された磁場 $B_{\rm out}/(R^{-2}(2\rho\Omega/\sigma)^{1/2})$ をその天体の質量でプロットした．両者とも地球を 1 とした．これらのデータをフィットする直線（実線）の傾きはほぼ 0.5 である．その 1 桁の広がりを淡く塗った．Sun ＝太陽，M ＝水星，E ＝地球，J ＝木星，I ＝イオ，G ＝ガニメデ，Sat ＝土星，T ＝タイタン，U ＝海王星，N ＝冥王星．

(39) の係数である $N\gamma^2$ は

$$N\gamma^2\propto M^{0.5} \tag{40}$$

とスケールすることがわかる[8]．ここで，惑星だけでなく，惑星の衛星も，太陽でさえ，同じようにスケールすることがわかる．また，内部に流体を持たない月や自転速度の非常に小さい金星がこの直線に乗らない．これも考え合わせて，天体内部で回転によって何らかの対流があるときに，同じような機構で磁場が生成されているのかもしれない．これを追究すれば，式 (40) の由来も理解されていくのではないだろうか？

3. まとめ

量子力学，電磁気学，重力，凝縮場，電磁流体力学などの基礎方程式に対して，準等式を用いて宇宙の階層を概観した．そして，これらの階層は無関係に存在しているのではなく，背景に共通の物理が潜んでいる可能性を，重要な次元を見出し比較することによって簡潔に議論した．しかし，物理の本質を見出すためには，できるだけ正確な計算と定量的な議論を通した吟味が必須であることも忘れないでほしい．

参考文献

1) 池内了，『宇宙と自然界の成立ちを探る—物質の構造と基本定数』（数理科学ライブラリ (8)）サイエンス社 (1995).
2) 松原隆彦，『現代宇宙論—時空と物質の共進化』東京大学出版会 (2010).
3) C.J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press; 2 版 (2008).
4) Fukuyama T., Morikawa M., Stagflation–Bose-Einstein condensation in the early universe, *Phys. Rev. D***80**:063520 (2009). http://arxiv.org/abs/0905.0173.
5) 谷口義明，岡村定矩他，『銀河 I—銀河と宇宙の階層構造』（シリーズ 現代の天文学）日本評論社 (2007).
6) Iguchi O., Kurokawa T. *et al.*, Statistical mechanics of self-gravitating system: Cluster expansion method, *Physics Letters A*, **260** p.4, (1999).
7) 桜井隆，小杉健郎他，『太陽』（シリーズ現代の天文学）日本評論社 (2009).
8) Nakamichi A., Mouri H., *et al.*, Coupled spin models for magnetic variation of planets and stars, *MNRAS***423** p.2977. http://arxiv.org/abs/1104.5093.

（もりかわ・まさひろ，お茶の水女子大学理学部）

素粒子物理の相互作用
微細構造定数



仁尾　真紀子

1. 自然単位系と質量次元

物理量を扱う場合，それが何の次元を持ち，どのような単位を持っているかを常に気にしなくてはならない．一般論としてはそうなのだが，実際に物理の勉強をしてみると，これが，結構やっかいである．量子力学の教科書にはいたるところにプランク定数 h が出てくるし，相対論ではあちこちで光の速度 c が顔を出す．物理量の次元を正確に保つためにはこれらの物理定数を書かなくてはならない．とりわけ，素粒子の理論での扱いというのは，量子論と相対論をどう融和させるかというところから始まったため，式を使って現象を表現しようとすると，h と c を何度も何度も書かなくてはならないはめに陥る．

そこで，$\hbar \equiv h/(2\pi)$ と c を 1 とする単位系が導入された．これを**自然単位系**という．これをとると，$\hbar$ と c から解放される以外に，どんな良いことがあるのか．電子の質量を m_e とする．これは自然単位系を用いることで，質量 $[M]$ のみならず，長さ $[L]$，時間 $[T]$，エネルギー $[ML^2/T^2]$，運動量 $[ML/T]$ までをも表すことができる．c の次元は $[L/T]$，$\hbar$ の次元は $[ML^2/T]$ であるから，長さの次元を作るためには

$$\frac{\hbar}{m_e c} \to \left[\frac{ML^2}{T}\frac{1}{M}\frac{T}{L}\right] = [L] \tag{1}$$

とすればよい．この長さは電子のコンプトン波長（を 2π で割ったもの）と呼ばれており，

$$\frac{h}{m_e c} \sim 2.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{m} \tag{2}$$

である．電子の関わる量子物理現象での典型的な長さと言えよう．一方，時間の次元は

$$\frac{\hbar}{m_e c^2} \to \left[\frac{ML^2}{T}\frac{1}{M}\frac{T^2}{L^2}\right] = [T] \tag{3}$$

で得ることができる．次元解析の基本量である長さ $[L]$ も時間 $[T]$ も，質量次元 $[M]$ のみで表すことができるのだ．

自然単位系での次元勘定を初めて知ったとき，私は結構な衝撃を受けた．試験の答案を書くたびに長さ $[L]$ やら時間 $[T]$ やらを気にして，式の右と左で比べっこしていたのだが，自然単位系を採用すると宣言すれば，質量次元 $[M]$ のみに注意して次元解析をすればよい．その簡単さといったら！長さと時間はともに質量の逆の次元，エネルギーと運動量は質量の次元と，すべて質量次元で語ることができる．高エネルギー極限が極小の極限に対応することも，自然単位系では一目瞭然だ．

2. 無次元量

自然単位系を採用すると，質量の次元のみを用いて物理量を勘定できることがわかった．それでは，質量次元のない，無次元の量は素粒子物理の中でどのような役割を果たすのだろうか．

電磁気学において，2 個の電子（電荷 e）の間に働くクーロン力を考えてみよう．クーロン力は 2

電子間の距離 r の2乗に反比例する斥力なのでその大きさは

$$F = k_e \frac{e^2}{r^2} \tag{4}$$

と表せる．ここで k_e はクーロン定数であり，どのような単位系を使用して電荷 e や距離 r を表すかによってその値と単位が異なってくる．国際単位系（SI）では真空での誘電率 ϵ_0 を用いて $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ と表す．SI では真空での透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ と定義された量で，透磁率 μ_0 と誘電率 ϵ_0 は電磁気学のマックスウェル方程式から光速 c と $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ で関係する．SI では c も決められた定数なので，ϵ_0 も既知の定数，従って，クーロン定数も厳密に決定している量ということになる．

素粒子を扱う場合は，さらに $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ とおく単位系を電磁気系に用いる．これをヘヴィサイド–ローレンツ系という．理論の記述にしか使用しない単位系だ．そこでクーロン定数に電荷 e^2 をかけた定数 α

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \tag{5}$$

を定義する．自然単位系 $\hbar = c = 1$ では力 F の次元は $[M^2]$，距離 r の次元は $[M^{-1}]$ であるからクーロン力の式

$$F = \frac{\alpha}{r^2} \tag{6}$$

より α が無次元 $[M^0]$ の量であることがわかる．SI 単位系に戻すには，$\hbar, c, \epsilon_0$ を復活させればよいので

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\frac{\hbar c}{r^2} = \alpha\frac{\hbar c}{r^2} \tag{7}$$

とすれば $\hbar c/r^2$ の部分は力 F の次元 $[ML/T^2]$ を再現し，α の部分が無次元になる．すなわち SI 単位系では

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \tag{8}$$

と表される．このように無次元数 α は単位系によってその表現が異なる．しかし，α そのものの値は，それが無次元であるために，単位系によらず同じ値をとる．単位系というのはそもそもどのものさしを使うかという選択だが，無次元であればものさし自体が必要ない．この値 $\alpha = 1/137.035\cdots$ を**微細構造定数**と呼ぶ．α の値によって決められた電磁気力に従って，原子が形成され，分子となり，化学反応を引き起こし，生命現象へとつながっている．

3. 微細構造定数という名前

微細構造定数という名前は，英語の "fine-structure constant" の直訳であるが，名が体を表さない典型例の一つであろう．例えば中性子という名前は，電気的に中性，つまりは電荷を持たないという重要な科学的知見を伝えている．それに比べて，微細構造定数という名前では電磁気力に関係があるとはとても思えない．とはいえ，この名前は科学史の中でも重要な発見に基づいて名付けられている．歴史にはあらがえない．

もともと，この微細構造とは水素原子のエネルギー準位の構造の中に，シュレーディンガー方程式では説明できない，より微細なエネルギー準位の分裂構造があることを指している．最初にこれを不完全ながら導き，微細構造（fine-structure）と名付けたのはドイツの物理学者ゾンマーフェルトで，ボーアの量子化条件を相対論的に拡張することで導出した．1916 年のことである．

非相対論的な量子力学においては，クーロンポテンシャル中にある電子のエネルギー準位は主量子数 n だけによるものとして決まり

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2n^2} m_e c^2 \tag{9}$$

となる．$n = 2$ では，角運動量 $l = 0$（S 状態）が1個と $l = 1$（P 状態）の3個の合計4個の状態が縮退している．ここで相対論からくる補正効果を考える．相対論的な量子力学でのディラック方程式を解いてしまえばすむ話だが，直感的な説明のためには，むしろシュレーディンガー方程式への相対論的効果を摂動計算で評価するほうがわかりやすい[1)]．考えるべき相対論的補正は，運動エネルギーの $\hat{p}^4$ の項，電子のスピンと軌道角運動

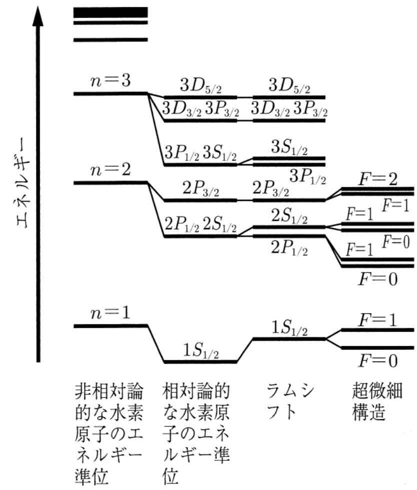


図 1 水素原子のエネルギー準位構造の概念図．エネルギー準位の尺度は正しくない．一番左が，シュレーディンガー方程式による準位．次は相対論的な効果を加味され，$n=2$ では微細構造 $2P_{3/2}$ と $2P_{1/2}$ および $2S_{1/2}$ の差が現れる．さらに場の揺らぎの効果により $2P_{1/2}$ と $2S_{1/2}$ が分離し，この差を発見者の名にちなんでラムシフトと呼ぶ．右端は陽子と電子のスピン=スピン相互作用による超微細構造の分裂を示す．

量の間の相互作用，そしてダーウィン項と呼ばれるクーロンポテンシャルへの補正項である．3 つの効果を足し上げると，補正エネルギーは軌道角運動量と電子のスピンの和である総角運動量 j にのみ依存して

$$\Delta E_{n,j} = -\frac{\alpha^4}{2n^3} m_e c^2 \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \quad (10)$$

となる．$2S$ では $j=1/2$, $2P$ に対しては $j=1/2$ または $3/2$ の値をとるから，$2S$ と $2P_{j=1/2}$ は縮退したまま，一方 $2P_{j=3/2}$ の縮退は解ける (図 1)．エネルギー準位の差が α^4 に比例していることが，微細構造定数の名の由来である．

4. 微細構造定数の決定

微細構造定数 α は無次元であるから，どのような単位系をとっても同じ値になる．では，なぜ α が $1/137.035\ldots$ という値かという問いに対して，今の物理学は答えを持たない．私たちにできるのは，できるだけ正確にこの値を決めることだけだ．

無次元の定数といっても数学定数の円周率 π や自然対数の底 e と違って，α は物理定数である．数学定数ならばその定義に基づき，紙と鉛筆による計算で，それが大変であればコンピュータに代替させて，値を求めることができる．一方，物理定数は自然現象の実験観測による測定値を用いて初めて決定され得る．例えば，先に述べた水素原子の微細構造という現象でもよい．万とある現象の中で，最も高い精度で α の値を決めることができる自然現象が，電子一個の磁気能率の大きさに関してである．

電子の磁気能率の大きさはボーア磁子を単位として無次元数である g 因子によって表される．その値は量子電気力学（QED）により α に関する摂動計算によって求めることができる．現在のところ，α^5 の係数までが知られており，g 因子を式で書くと

$$g = 2 + g_1\alpha + g_2\alpha^2 + g_3\alpha^3 + g_4\alpha^4 + g_5\alpha^5 \quad (11)$$

となる．右辺の最初の 2 は，ディラックの相対論的量子力学の方程式から決まる値である．残りの α を係数として持つ寄与が QED による量子効果を示す．g には実験値を[2)]，g_1 から g_5 までの係数に QED による計算結果を代入し[3)]，α について解くことで

$$1/\alpha(\text{電子}\ g) = 137.035\ 999\ 173(35) \quad (12)$$

と得られる．括弧中の数字は値の不確かさが最後の 2 桁であることを示す．

α の値を得られる現象は多々あれど，式 (12) に匹敵するような高い精度を得られるものはあまりない．しかし，2011 年にフランスのグループはこれに成功した[4)]．ルビジウム原子をレーザー光で作った格子に載せる方法で，プランク定数と質量の比（$h/m_{\rm Rb}$）を正確に決定し，それを関係式

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c}\frac{m_{\rm Rb}}{m_e}\frac{h}{m_{\rm Rb}} \quad (13)$$

を用いて α の値に変換する．ここで，R_∞ は水素原子のスペクトル測定で決まるリュードベリ定数，$m_{\rm Rb}/m_e$ はルビジウム原子と電子の質量比で，ともに高い精度で測定されている[5)]．この方法で決

めた α は

$$1/\alpha(\mathrm{Rb}) = 137.035\,999\,049(90) \qquad (14)$$

である．式 (12) と式 (14) のごくわずかの差 0.000 000 124(98) に，なにか重大な意味があるのだろうか．実験の誤り，理論の計算間違いなどを完全に排除した上でも差が残るとすれば，未知の物理現象が潜んでいると考えざるを得ないだろう．もっとも，それは値の不確かさがさらに小さくなり，差が確定的になって初めて言えることだ．物理定数の精密決定に，多くの研究者が注力する所以である．

5. 素粒子に働く力と結合定数

素粒子間に働く電磁気力の強さは無次元数の微細構造定数 α で表される．素粒子間に働く他の力，強い相互作用，弱い相互作用，そして重力の場合はどうだろうか．

電磁気力を記述する QED は，もうちょっと算数っぽく言うと $U(1)_{em}$ という対称性を持つゲージ理論である．強い相互作用では $SU(3)$ という対称性を持つゲージ理論となり，各々のクォークはカラー電荷（赤，緑，青）を持ち，量子色力学（QCD）と言われている．QCD の結合定数は，QED と同じく無次元で，習慣的に α_s（s はたぶん strong の意）と記述される．

弱い相互作用は電磁相互作用と一緒に電弱統一模型として $SU(2) \times U(1)_Y$ という対称性を持つゲージ理論としてまとめられている．$SU(2)$ がアイソスピン I の対称性，$U(1)_Y$ がハイパー電荷 Y に関するゲージ対称性である．もともとはこれだけ高い対称性があったものが，ヒッグス粒子によって対称性の自発的な破れが引き起こされ，電磁気力に相当する $U(1)_{em}$ だけが残った．$SU(2)$ と $U(1)_Y$ に相当するゲージ場とレプトン粒子との結合の強さを g と g' とする．これを用いて，$U(1)_{em}$ でのゲージ場の結合の強さは電荷 e で，$e = gg'/\sqrt{g^2 + g'^2}$ と関係がつく．この g と g' から作った結合定数をそれぞれ α_2 と α_1 と呼ぶことにすると，これらもやはり無次元の定数となる．

ところが最後に残った重力の場合はそうはならない．ニュートンの万有引力の式を思い出そう．質量 m と M の 2 つの物体が距離 r だけ離れているときに働く力はクーロン力と同じように $1/r^2$ 則で表されて，

$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad (15)$$

である．ここで G は万有引力定数である．自然単位系で次元勘定を行うと，質量次元を持つ m と M が右辺の分子に直に現れているので，G の次元は $[M^{-2}]$ になる．重力に関わるものの中で，他にこの G の次元を相殺するような質量次元を持つ自然定数はない．つまり，重力の結合定数 G は無次元量にはどうやってもなり得ない．

古典力学や一般相対論での重力に関わる物理現象を見る場合は，万有引力定数 G が無次元数でないことは，なんら問題を引き起こすものではない．問題となるのは，素粒子を場の励起状態として扱う場の理論での量子効果を考える場合である．

6. 結合定数の次元とくりこみ可能性

シュレーディンガー方程式による非相対論的な量子力学では，確率の保存則が成立する．これは一つの電子があれば，それは過去から未来永劫，宇宙のどこかで必ず存在していることを示す．実験的にはそうでなく，電子は陽電子と対消滅し，光子になる．この現象を説明するために，光子（電磁場）だけでなく，電子も場であると考える．電子の場が大きく励起したり，限りなく小さくなるというような場の配位の変化が，電子という粒子の生成や消滅を再現する．

素粒子の表現に場を導入したために，たとえ一個の電子の運動を記述するとしても，空間中に稠密に拡がった場の持つ無限大の自由度を取り扱わねばならない．そこでは素粒子における量子効果とは，素粒子の場の配位が様々に揺らぐためとみることができる．ところが，場に無限大の自由度があるために，場の揺らぎを足し上げると無限大

に発散してしまい，素粒子を場で記述することそのものができなくなるというおそれがある．

この場の量子化の可否の判断に，結合定数の次元がよい目安となる．電磁気力での微細構造定数 α のように結合定数が無次元である場合は，理論自身の枠組み内で自身の持つ対称性により揺らぎがうまく制御できている可能性がある．いわゆる**くりこみ可能**といわれている場合である．先の電子 g 因子の QED 理論計算において，摂動によって α^5 の項まで有限値として計算できたのも，実は，QED がくりこみ可能であるためであった．素粒子の標準模型を作る3つのゲージ対称性 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ にそれぞれ対応する3つの結合定数，強い相互作用の α_s，アイソスピンの α_2，ハイパー電荷の α_1 もすべて無次元であり，どのゲージ理論もくりこみ可能である．この事実は，素粒子の標準模型の成功を支える大きな要因の一つとなっている．

それに反して，重力での万有引力定数 G は負の質量次元 $[M^{-2}]$ を持っている．このような場合は量子揺らぎが大きすぎて制御できず，場の理論での記述そのものが破綻をきたす（くりこみ不可能）おそれがある．つまりは重力の量子論を場の理論のレシピで作ることが非常に困難なのだ．それが単純な次元解析からでも推察できる．重力の量子化の問題を解決するためには，標準模型のような点粒子を基本単位とする描像をあきらめ，広がりをもった弦を導入する方法が有力ではないかと言われており，1980 年代より弦理論（String Theory）として研究されている．

もっとも，このような重力場の量子効果による破綻を心配しなければならないのは極端な高エネルギー，極微小の距離にあるものを見る場合のみである．重力の量子論が必要となるスケールを，電子のコンプトン波長を求めたように，重力の情報を担う G と $\hbar$ と c を用いた次元解析で求めてみよう．エネルギーの次元と長さの次元を持つ量を構成すると

$$\sqrt{\hbar c^5/G}\sim 1.2\times 10^{19}\,\mathrm{GeV}, \qquad (16)$$

$$\sqrt{\hbar G/c^3}\sim 1.6\times 10^{-35}\,\mathrm{m} \qquad (17)$$

となり，それぞれプランクエネルギー，プランク長と呼ばれている．人類が持つ最大の加速器，スイス CERN の大型ハドロン衝突型加速器（LHC）の衝突エネルギーが約 $10\,\mathrm{TeV}=10^4\,\mathrm{GeV}$ であるから，プランクエネルギーが想像を絶する高エネルギー極限であることがわかるだろう．

7. 結合定数の高エネルギーでの統一？

素粒子の場の量子化，つまりは揺らぎを考える場合，結合定数の次元が重要な指標となる．そして，この量子揺らぎのために，結合定数の値は絶対的に固定された定数とはならないことが知られている．結合定数は「走る（run)」のだ．

話を微細構造定数 α に戻そう．$\alpha=1/137.035\ldots$ と決めた式 (12) は静止している電子一個の磁気能率の大きさを測ることによって決められた．この現象に現れる質量スケールは電子の質量 m_e のみである．正確に述べると「電子の質量 $m_e=0.51\,\mathrm{MeV}/c^2$ のスケールで電磁相互作用を見た場合，その結合定数は $\alpha(m_e)=1/137.035\ldots$ である．」前半の条件を決して落としてはいけない．弱い相互作用で力を媒介するゲージ粒子に Z ボソンという粒子があって，その静止質量は $m_Z=91\,\mathrm{GeV}/c^2$ である．このスケールでは微細構造定数は $\alpha(m_Z)=1/128.9\ldots$ と小さくなってしまうことが理論的にも実験的にも知られている．

場の量子化とは，場の揺らぎを足し上げ均したときにどのような効果が見えるかということである．均すという作業を行うときに，どのスケールを基準として現象を眺めるかという人為的な視点が入る．電子の質量 m_e 程度のスケールか，Z ボソンの質量 m_Z 程度のより短いスケールかという違い，いわば個人の好みによる選択の自由が許されてしまう．

実際の観測可能な物理量は，このような人為的な選択の仕方にはよらない．よらないように，スケールの違いに応じて結合定数の値が変化する．この変化の仕方をくりこみ群と呼ぶ．要は，場の理論の寄与を，結合定数からの寄与と捉えるか，相

互作用のダイナミカルな過程からの寄与と捉えるか，その分け方を適宜，変えてみましょう，でもどっちでも物理そのものは不変ですよということである．

逆にいうと，物理現象の典型的なエネルギースケールをくりこみのスケールとして上手に選ぶと，量子効果のほとんどは結合定数自身に取り込まれることになり，ダイナミカルな過程からの寄与を小さく押さえることができる．式 (12) での電子 g 因子の QED の摂動計算の場合も，現象のスケールである電子の質量 m_e を QED のくりこみのスケールとして選んでいるため，$g_1, g_2, \cdots$ の係数は 1 以下の小さな数となっている．

結合定数のくりこみ群による変化の仕方は，その理論自身によって予測できるものだ．電磁気相互作用やハイパー電荷のような $U(1)$ ゲージ対称性の場合は，高エネルギーになるに従って，$\alpha(m_e) < \alpha(m_Z)$ であるように，結合定数 α や α_1 が増加する．逆に，$SU(2)$ や $SU(3)$ の対称性を持つアイソスピンや QCD の部分は，高エネルギーになるにつれ結合定数 α_2 や α_s が小さくなり自由な理論に近づく．これを特に漸近的自由と呼ぶ．

素粒子標準模型 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ での 3 個の結合定数 α_3 $(= \alpha_s)$, α_2, α_1 を高エネルギー極限まで走らせた図が，図 2 の上の図である[6]．3 個の値がだいたい 10^{14} から 10^{16} GeV あたりで同じオーダーの値になっていることが見て取れる．これは高エネルギーになれば，素粒子に働く 3 つの力，電弱強が統一されており，それを記述する理論があることを期待させる．

さらに素粒子標準模型に超対称性というボソン粒子とフェルミオン粒子の間の対称性を導入した場合を考える．実験的には超対称性が存在するという証拠はまだない．しかし，対称性を増やすことで，場の揺らぎをさらにうまく制御できることになり，理論的にみて興味深い点が多い．素粒子標準模型の最も簡単な拡張として超対称性を導入したあとの 3 個の結合定数のくりこみ群による変化の図が図 2 下である．3 本の線が図 2 上とくらべるとはるかに小さな領域——ほぼ一点と言ってもよい——で交わることが見て取れる．これは非自明なできごとであり，素粒子理論の統一には超対称性が必要であることを強く示唆している．ちなみに，この図の一番右端が重力に量子論が必要となるプランクエネルギーのスケール 10^{19} GeV である．この図に重力が書き加えられるのはいつの日だろうか．

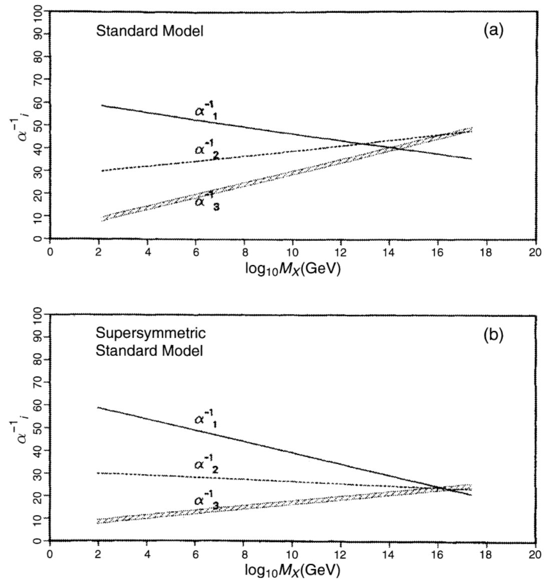


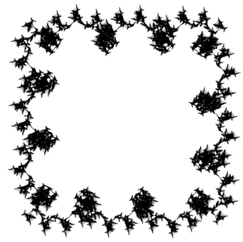
図 2　素粒子理論での $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に相当する結合定数 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ のくりこみ群による変化．横軸は対数スケールによるエネルギーを GeV の単位で，縦軸は各々の結合定数の逆数を示す．上の図が素粒子標準模型，下の図が超対称性を導入した模型の場合を示す．参考文献 6) より再掲．

参考文献

1) 桜井純（著），段三孚（編），桜井明夫（翻訳），「現代の量子力学」下，吉岡書店．
2) D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).
3) T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 111807 (2012).
4) R. Bouchendira, P. Clade, S. Guellati-Khelifa, F. Nez, F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080801 (2011).
5) http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html で各種の物理定数の最新値が検索可能となっている．
6) P. Langacker and M. Luo, *Phys. Rev.* **D44**, 817 (1991).

（にお・まきこ，理化学研究所）

基本定数の宇宙論的変動をめぐって



藤井 保憲

1. 前書き

本誌の 2007 年に Dirac の特集号があり，筆者も彼の**巨大数仮説**について論じたことがあった．この間，宇宙論においては**加速宇宙**（accelerating universe）に関する研究がさらに進歩し，今も多くの研究がなされているが，その謎は未だに完全に解けたとは言い難い．この加速宇宙という現象は**暗黒エネルギー**（dark energy（DE））の存在を伴い，特に，**重力的スカラー場**の存在を示唆している．これについては重力定数の時間変化という Dirac の考え（1937）を理解するために，Jordan が 1955 年に提出した**スカラーテンソル理論**（scalar-tensor theory（STT））が再発見され，その発展の過程で，これまで物理「定数」と考えられてきた量の時間的変化に新たな光があてられている．特にこの理論に特有な**共形変換**（conformal transformation）との密接な関係は，Dirac の元来の考えとは異っているが，それだけに興味深く，その一端を説明するのが今回の稿の目的ともなっている．このため STT の説明に最小限の紙面を割くことを許容頂きたい．また物理としての加速宇宙への適用の詳細については文献 1, 2) を参照されたい．

2. 加速宇宙

Type Ia の超新星[3] や，その他いくつかの観測事実から，宇宙は加速膨張をしていることが判明した．それは Einstein による純粋な一般相対論（general relativity（GR））ではなく，**宇宙項** Λ の存在を強く示唆する．しかし問題は，その大きさである．観測結果は，**臨界密度**（critical density）$\rho_{\rm cr}$ との比で

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda_{\rm obs}}{\rho_{\rm cr}} = 0.72 \pm 0.06 \qquad (2.1)$$

と表されている．ここで臨界密度は他の測定値を用いて表され，結局

$$\Lambda_{\rm obs} \approx 0.89 \times 10^{-120} \qquad (2.2)$$

を得る．ただし，この稿では **Planck 単位系** $c = \hbar = M_{\rm P} (= (8\pi G)^{-1/2}) = 1$ が使われる[*1]．

一方，いわゆる統一理論の立場からは，理論的な値として $\Lambda_{\rm th} \sim M_{\rm P}^4 \sim 1$ と考えられる．上の式の最後の値 ~ 1 は，もちろん Planck 単位での値である．これに比べると観測値は 120 桁くらいも小さい；

$$\Lambda_{\rm obs} \sim 10^{-120} \Lambda_{\rm th}, \quad ここで\ \Lambda_{\rm th} \sim 1. \qquad (2.3)$$

これは，物理の歴史の中でもかつてない理論と実験の不一致である．そもそも理論は，120 桁もの精度を持っているのだろうか．こんな疑問は**微調整問題**とも呼ばれ，理論につきつけられた峻烈な課題である．

しかし，(2.2) には，もう一つ違った面もある．それは (2.2) で，現在宇宙の年齢とされている $t_0 \approx 1.37 \times 10^{10}$y を Planck 単位で表した値 $\approx 1.59 \times 10^{60} = 10^{60.2}$ を直接用いると

$$\Lambda_{\rm obs} \approx 2.23\, t_0^{-2} \sim t_0^{-2} \qquad (2.4)$$

と書けてしまうことである．このような関係が簡単に目に見えるのは，まさに Planck 単位系のおかげである．ここに Dirac[4] が考えたのと同じ種類の**巨大数**の逆数が現れていることに注目したい．そうすれば，この式が単なる数値的な偶然とは思えないであろう．こ

*1） 始めの 2 つ，c と $\hbar$ についてのものは，特殊相対論と量子論が全宇宙で正しいとする「信念」の表明以上とは言い難い．この単位系における長さ，時間，エネルギーの単位はそれぞれ 8.10×10^{-33} cm, 2.70×10^{-43} sec, 2.44×10^{18} GeV である．

のような視点に立つならば，考えをさらに進めて，実はもっと一般的な法則

$$\Lambda_{\mathrm{obs}} \sim t^{-2} \tag{2.5}$$

が背後にあり，(2.4) はその現れに過ぎない，と解釈してもよいだろう．すなわち，これは現在値 t_0 だけではなく，宇宙の全歴史を通じて成り立つと考えるのであり，これを**減衰宇宙項**のシナリオと呼ぶこととしよう[1,2]．そうであれば，現在の Λ_{obs} が小さいのは，単に我々が宇宙的な意味で年齢を重ねてきたからであり，決して何かの理論的パラメターを微調整した結果ではないとみなされるだろう．微調整問題はこうして自然に解決されるはずである．

一方，(2.5) のような時間依存性があるならば，Λ には何か力学的な内容があることも暗示される．内容として最も簡単なのはスカラー場であろう．そう考えると，(2.1) が示す全宇宙の 3/4 近くを占めるエネルギーはスカラー場によって担われていることを意味する．このエネルギーはこれまでの観測にかからなかったという意味で，**暗黒エネルギー**（dark energy（DE））と呼ばれる．このスカラー場はどんな理論的理解を提供するだろうか．これについて我々は Dirac の足跡と再度交差することとなる．

3. スカラーテンソル理論

以前の解説で説明したように，重力定数に関する彼の予想 $G \sim t^{-1}$ は 1970 年代の太陽系実験によって否定されたのだが[*2]，従来，一定不変と考えられてきた物理定数が，実は宇宙の時間と共に変動しつつある，という考えは多くの研究者を魅了した．しかし G が定数ではないとしたら，それは Einstein の GR に反するものであり，GR にとって替わる理論があるとしたらそれはどんなものだろうか，という深刻な疑問が，上に述べた実験的研究以前にも存在していた．これに対する最初の答えが Jordan によって提出された．1955 年のことで，出発点とされたのは次のラグランジアンであった[5)*3)]；

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R-\epsilon\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+L_{\mathrm{matter}}-\Lambda\right). \tag{3.1}$$

ここで ϕ と書いたのがスカラー場で，上の式の右辺第 2 項は，その運動エネルギーを表している．ここで $\epsilon=\pm1$ で定数である．この稿では $g_{00}<0$ と選ぶので，$\epsilon=+1$ が正ならば，運動エネルギーは正で，正常な場合だが，負でも直ちにマイナスエネルギーの ghost を表すわけではない．もっと重要なのは右辺第 1 項で，この理論に特有な**非最小結合項**と呼ばれる．GR では，ここは $(16\pi G)^{-1}R$ となっていて Einstein–Hilbert（EH）の項と呼ばれている．ここで R はスカラー曲率で，重力定数 G はここに現れる．上の非最小結合項と比べて $\xi\phi^2=(8\pi G_{\mathrm{eff}})^{-1}$ とおくと，一般相対論における EH 項の形に帰着する．G_{eff} と effective（実効）を意味する添え字をつけたのは，定数ではない G を表現するためである．純粋に定数ではないのは，スカラー場 $\phi(x)$ のせいだ，という理論である．また ξ は**無次元**の正定数とする．GR は，力学変数として時空の曲がり方を表す計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いたのだが，Jordan の拡張理論ではスカラー場を含むことから，この理論は**スカラーテンソル理論**（scalar-tensor theory（STT））と呼ばれるようになった．なお，(3.1) の右辺第 3 項の L_{matter} は GR と同じ意味の物質を表す．さらに最後に加えた $-\Lambda$ は**宇宙項**で，Jordan の元来の理論にはなかったが，後で加速宇宙に応用するときに備えて付け加えておく．観測で見出された加速宇宙は $\Lambda>0$ に対応している．

このようにして導入された STT は，GR に対する**代替理論**（alternative theory）として，実験との比較に際してよく用いられた．特に 1961 年には Brans と Dicke によって，L_{matter} には ϕ が入らない，という「制約」（以下，BD の制約とする）が付け加えられた[6)]．こうすると，**弱い等価原理**[*4)]（Weak Equivalence Principle（WEP））が満たされるからであった．しかし Einstein 理論の引き立て役以上に決定的な役割を果たすことのない時期を過ごしたとも言えよう．しかし，1998 年以降に宇宙の**加速膨張**が発見されて宇宙項の存在が認められるに至り，GR を超える理論の候補の一つとして，新たな注目を集めるようになった．それについて説明しよう．

まず Pauli によって主張されたのだが，この理論で

*2） 我々は (2.4) という「実験事実」から出発して理論を考える，という意味で Dirac とは対照的な進路をとっている．

*3） ここでは新たなパラメターとして ξ と ϵ を用いるが，もとの理論では ω という記号で，$\omega=\epsilon\xi^{-1}$ の関係にある．

*4） Pisa の斜塔の実験のように，重力のもと，すべての物体は同じ加速度で落ちることを言い，Einstein 理論の出発点となったが，完成した GR では，曲がった時空の接時空は Minkowski 時空である，というさらに抽象的な言い方となり，Einstein の等価原理の名が使われる．

は，次の式によって定義される**共形変換**（conformal transformation）が重要な役割を果たす[*5]；

$$g_{\mu\nu} \to g_{*\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}. \qquad (3.2)$$

ここで $\Omega(x)$ は時空点 x の任意関数である．この式の逆を (3.1) に代入すると，同じラグランジアンを新しい計量テンソル $g_{*\mu\nu}$ によって書き直すことができる．この変換によって，別の**共形枠**（conformal frame）に移動した，と言う．ただし，この変換は，理論を不変に保つわけではない．そこで特に Ω を

$$\Omega^2 = \xi\phi^2 \qquad (3.3)$$

と選ぶと

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g_*}\left(\frac{1}{2}R_* - \mathrm{Sgn}(\zeta^2)\frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + L_{*\mathrm{matter}} - V(\sigma)\right) \qquad (3.4)$$

となる．ここで R_* は, (3.1) におけるスカラー曲率を，今度は $g_{*\mu\nu}$ の同じ形の関数として表したものである．ここで重要なのは，右辺第 1 項の非最小結合項の係数が定数となっていることである[*6]．これは $G_* = 1$，すなわち G は定数であり，これに関する限り GR に等しい．ここでの教訓は，G が定数であるか，あるいは時空座標と共に変化するかは，共形枠の選び方次第だ，ということである．特に G が定数となる共形枠を **Einstein 枠**（略して E 枠）と呼ぶ．そうではなく，したがって G が変数である共形枠を **Jordan 枠**（J 枠）とも呼ぶが，それは実は無数にある．また，E 枠で正準なスカラー場は，元来の ϕ ではなく，それから次のようにして定義される σ である；

$$\phi = \xi^{-1/2}e^{\zeta\sigma} = \xi^{-1/2}\Omega. \qquad (3.5)$$

ただし ζ は, ξ, ϵ できまる係数で $\zeta^{-2} = 6 + \epsilon\xi^{-1}$ と表される．したがって (3.4) で $\mathrm{Sgn}(\zeta^2)$ と書いたのは，$\epsilon\xi^{-1} > -6$ を意味する．

さらに (3.1) の右辺最後の項は，(3.4) では

$$V(\sigma) = \Lambda e^{-4\zeta\sigma} \qquad (3.6)$$

という σ のポテンシャルとなり，これは非常にゆるやかに減少する関数である[*7]．

Jordan は Dirac が主張したように，G が定数ではなく，例えば**宇宙時** t の関数として変動し得る可能性を指摘したのだが，このことは STT の一意的な結論ではなく，共形枠を決めないと定まらないという，やや込み入った関係となっている．では我々はいずれの共形枠の中にいるのだろうか．何がそれを決めるのだろうか．これは Einstein の理論体系には含まれていなかった概念であった．実はここに，「定数の宇宙論的変動」に関する新しい捉え方が隠されている．このような物理的な観点を明らかにするために，以下，単純な理論的模型に基づいて宇宙論を再点検してみよう．

4. 宇宙論への応用

議論を簡単にするためにまず，J 枠でのラグランジアン (3.1) から出発してみよう．宇宙の幾何学としては，一様等方で，空間的な部分は平坦，という RW 時空を考えよう．もう一つ仮定を加え，物質場は輻射優勢（$p = (1/3)\rho$）の完全流体で記述される，とする．このような状況では，宇宙の**スケール係数** $a(t)$，スカラー場 $\phi(t)$，および**物質密度** $\rho(t)$ はいずれも宇宙時 t のみの関数で，空間座標には依存しないと考えてよいだろう．非常に単純化されてはいるが，物理的に重要な特徴を充分反映していると考えてよい．宇宙方程式は (3.1) から導かれ，t のみに関する連立常微分方程式で，その漸近解は，次のように求められる；

$$a = \mathrm{const.}, \qquad (4.1)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{4\Lambda}{6\xi+\epsilon}}\,t, \qquad (4.2)$$

$$\rho = -3\Lambda\frac{2\xi+\epsilon}{6\xi+\epsilon}. \qquad (4.3)$$

ここでまず，(4.1) は，宇宙が膨張も収縮もしないことを示していて，これは Hubble 以来の観測事実に反する．したがって，我々は J 枠には住んでいない，というのが第 1 の結論である．次に (4.3) を調べてみる．物理的にみて，物質のエネルギーは正だから $\rho > 0$ という条件を満たしているはずである．以前に述べたよ

*5) この変換は一種の局所的なスケール変換で，曲がった空間で使うのに便利な形となっていて，Weyl のスケール変換とも呼ばれる．Weyl 自身は，これによって，後にゲージ変換と呼ばれるようになるものを初めて考えたのであった．

*6) このことを実際の計算によって示すのは決して簡単ではない．例えば文献 1) の Appendix G を参照されたい．

*7) このポテンシャルは，同じくスカラー場が登場する quintessence と称する方法でも現象論的に用いられるが，我々の STT では共形変換の法則から理論的に導かれる点に特色を持つ．その他多くの行き方については，例えば文献 7) が参考になるだろう．

うに $\Lambda > 0$ とすると，(4.3) からは $\epsilon = -1 < 0$，および $2 < \xi^{-1} < 6$ となっているべきことが導かれる．このことの重要性は，Λ の存在にもかかわらず，a の指数関数的増大が生じない，という結果に現れている*8)．

とにかく，我々が住んでいる共形枠はＪ枠ではないのだから，他の枠を探すこととなる．共形枠が無数にあることは既に述べた通りだが，まず試してみるべきはＥ枠であろう．これについては (3.2) からＥ枠での宇宙時 t_* とスケール係数 a_* を与える関係式

$$dt_* = \Omega dt,\ および\ a_* = \Omega a \qquad (4.4)$$

が直ちに導かれる．次いで宇宙方程式の漸近解については，(3.3)，または (3.5) などを使って (4.1)–(4.3) を書き直せばよいのだが，詳細を省いて結果のみ記すと次のようになる；

$$a_* = t_*^{1/2}, \qquad (4.5)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \frac{1}{2}\zeta^{-1}\ln t_*,$$

$$ここで\ \Lambda e^{-4\zeta\bar{\sigma}} = \frac{1}{16}\zeta^{-2}, \qquad (4.6)$$

$$\rho_\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt_*}\right)^2 + V(\sigma) = \frac{3}{16}\zeta^{-2}t_*^{-2}, \qquad (4.7)$$

$$\rho_* = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\zeta^{-2}\right)t_*^{-2}. \qquad (4.8)$$

ここでまず注目すべきは (4.5) で，今度は宇宙は確かに膨張する．前に G が定数か，または変動するかは共形枠に依存すると述べたが，G 以外の実例がここにもある．しかもこの (4.5) での $t_*^{1/2}$ という振舞いは，輻射優勢の仮定から期待される通りであり，Ｅ枠が我々が住んでいる共形枠であることを強く示唆している．また当然だが G が定数であることは，現在の観測結果とも一致している．

次に注目すべきは (4.7) である．この ρ_σ は１番目の式で定義され，スカラー場の密度，つまり DE のエネルギー密度を表し，$\Lambda_{\rm obs}$ に他ならない．この意味で (4.7) の最右辺はまさに減衰宇宙項を表している．つまり STT はこの基本法則を自然に導いてくれる理論ということができる*9)．

このようにして，Ｅ枠こそ我々が住む共形枠，つまり物理的な共形枠とみなしてよいようである．しかし，その結論は尚早に過ぎるのではないだろうか．そう考える理由は，物質を構成するミクロな素粒子の質量が時間と共に変化する様子にある．多少複雑だが，説明してみよう．

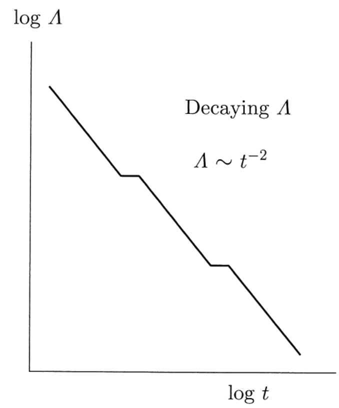


図１ $\Lambda(t)$ に対する数値解の１例の概念図を log-log スケールで示したもの．短い水平部分（踊り場）が現れるが，全体的な振舞いは $\sim t^{-2}$ の範囲内にとどまる．

5. 物質場の質量

手始めにＪ枠で $L_{\rm matter}$ を書いてみよう．議論を少しでも単純にするために，相互作用を持たない中性スカラー場 Φ を考える*10)；

$$\mathcal{L}_{\rm matter} = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2\right). \qquad (5.1)$$

ここで m はこの場の質量である．これは，実は以前に述べた BD の制約と関係がある．簡単に言えば，(5.1) における m は純粋に定数であるとしていて，物

*8) もう少し詳しく言うと，宇宙方程式の一つは Einstein 方程式に相当する $6\varphi H^2 = (1/2)\epsilon\dot{\phi}^2 + \rho + \Lambda - 6H\dot{\varphi}$ を含んでおり，$\epsilon = -1$ の場合は ϕ の運動エネルギーが Λ を打ち消す効果を持つ．ここで $\varphi = (1/2)\xi\phi^2, H = \dot{a}/a$ である．これは最初 Dolgov によって示されたのであるが[8]，彼自身，このような認識を持ってはいなかったようである．

*9) 加速宇宙への応用の際は漸近解を超えた数値解が求められ，多くの場合図１のようにいくつかの短く水平な**踊り場**が現れる．これは方程式の非線形性，および若干の現象論的な**捕捉機構**の効果であるが，全体として t_*^{-2} の振舞いの範囲に留まる．踊り場の中心的な t 座標と高さを $t_{*i}, \Lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ と記そう．それぞれの踊り場の範囲では $\Lambda \sim \rho_\sigma$ がほとんど定数で真の宇宙定数のように作用し，$a(t)$ に mini-inflation，つまり宇宙の加速を引き起こす．この踊り場の高さが $\Lambda_i \sim t_{*i}^{-2}$ によって近似され，これが (2.5) の意味するところである．t_{*i} の一つが t_{*0} と期待される．これらに関する詳細は文献 1) の第５章，2) の第６章を参照されたい．

*10) STT における重力的スカラー場 ϕ と混同しないでほしい．むしろ素粒子的な相互作用をする場を考えるのである．

質ラグランジアンに場 ϕ が参入していない．その意味で，今は BD の制約に基づいた模型を考えていることになる．

さて E 枠に移ってみよう．そのために (3.2) とともに

$$\Phi=\Omega\Phi_*,\ \text{および}\ m=\Omega m_* \tag{5.2}$$

を用いて (5.1) を書き直すと

$$\mathcal{L}_{*\text{matter}}=\sqrt{-g_*}\left(-\frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi_*\partial_\nu\Phi_*-\frac{1}{2}m_*^2\Phi_*^2\right) \tag{5.3}$$

という結果が得られる*11)．この形から見て m_* が E 枠において物質場 Φ_* の質量とみなされることになる．

一方，(4.1), (4.5), (4.4) の第 2 式から

$$\Omega=t_*^{1/2},\ \text{したがって}\ m_*=t_*^{-1/2}m \tag{5.4}$$

となる．これは m_*^{-1} が宇宙のスケール係数と同じ時間依存性を持つことを意味し，現在我々が宇宙膨張を理解する仕方とは相容れない．この事情は，多少込み入った説明を要するかもしれない．

天文学者が遠方の天体を望遠鏡で捉えたとき，まず行うのが届いた光のスペクトル解析である．これを地上での原子スペクトルと比較して，観測された輝線や暗線がどの原子レベルによるものかを決定する．さらにそれらが，地上で観測されるものとどれだけ波長が赤いほうにずれているかも測定する．この**赤方偏移**から，その天体が地球から遠ざかる速度を決め，さらに Hubble の法則と比べることによって星雲間の距離（の変化）を表すスケール係数を決定する．一方，地上のスペクトルの波長は，原子スペクトルのレベル間転移の振動数に基づき，Rydberg 定数 $\sim m_{\text{red}}e^4$ で与えられる．ここで m_{red} はそのレベルに関与する電子の換算質量であるが，原理的に言えば，要するにミクロな素粒子の質量に他ならず，例えば (5.3) に現れる m_* と考えてよい．もちろん，その逆数は長さである．また e は素電荷であるが，まずはその寄与は第 2 義的なものとして考慮の外におくとしよう．こうした意味で，宇宙のスケールは素粒子の質量 m_* を**基準**として測定されていると考えてよいだろう．これは，どんなに遠い天体でも，地球上と同じ量子力学が同じように成り立っている，という状況を表している．当然だが，光が発射された過去の時点でも，m_* は我々の現在値と同じであったとみなされる．

これに関連してもう一つ指摘したいのは，長さに関する物指しでも，あるいは時間間隔を測る時計でも，とにかく基準自体の変化は検知できない，ということである．例えば Galilei が Pisa の Duomo の天井からつるされたシャンデリアの揺れる周期が，振動の振幅によらないことを発見した際にも，時間間隔の基準は彼自身の脈拍の周期であった．もし興奮のあまり，心拍数が高くなったりしたら，彼の発見そのものが誤りになったかもしれない．しかし，そういった異常状態には本人が気がついたはずとも言えよう．しかしながら，そういう「補正」ができるのは，自分の体の中に，心臓のその時々の動きとは別の時計が備わってもいるからだ，とも言えよう．要するに，基準として一種類しかない場合には，定義によって変化は感じ取れない．上に述べた m_* を基準とした場合というのは，これに相当する．さらにその場合，変化を検知不能というのは，変化無し，または常に定数，ということと等価であろう．

もう一つ，我々が学んだように，ある量，例えば質量が定数か，あるいは変化するかは共形枠の選択に依存する．これらを総合して，m_* を測定の基準とすることは，m_* が不変に留まるような共形枠を選ぶこととなる．この見地からみて (5.4) の第 2 式は受け入れがたい．それではどうするか．(4.5)–(4.8) に示された振舞いから見て，E 枠からは離れ難い．ならば質量の部分だけ変更できないだろうか．こう考えて試行錯誤を繰り返した結果，J 枠での m の与え方を (5.1) の第 2 項ではなく，替わりに

$$\mathcal{L}_{\phi\Phi}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}f^2\phi^2\Phi^2 \tag{5.5}$$

とする．ここで f は**無次元の結合定数**で，項全体を**スケール不変**にしている．このような選び方は素粒子の理論からは好都合と考えられている．さらに，これは普通の質量項ではなく，ϕ と Φ の相互作用項である．この右辺に (3.2) から直ちに得られる $\sqrt{-g}=\Omega^{-4}\sqrt{-g_*}$，(5.2) の第 1 式，(3.3)，また同じことだが (3.5) の最右辺を代入すると

$$\mathcal{L}_{\phi\Phi}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}m_\sharp^2\Phi_*^2,$$
$$\text{ただし}\ m_\sharp^2=f^2\xi^{-1}=\text{const.} \tag{5.6}$$

を得る．これは，J 枠での相互作用項が E 枠では望み

*11) 厳密には $\partial_{\mu,\nu}\Phi_*$ は $(\partial_{\mu,\nu}+\zeta(\partial_{\mu,\nu}))\Phi_*$ とすべきだが，結果として特に重要ではないので省略した．

通りの定数質量項に化けることを示している．

この流れは**対称性の自発的破れ**を示唆しているが，破れるのは無次元な f から生ずる**大域的スケール不変性**である．そもそも (3.1) の初めの 2 項はこの性質を持っており，GR との大きな違いであった．また (3.5) によると ϕ は真空期待値 $\xi^{-1/2}$ を持ち，σ は**南部–Goldstone（NG）場**として登場する[9]．実際，(3.1) で最後の Λ を除いた部分，つまり本来の Jordan 理論についてスケール変換の Noether current を導き，その保存則から E 枠では σ が**質量ゼロの NG 場**となることが示され，dilaton とも呼ばれる．これによってスケール不変性が自発的に破れ，(5.6) の第 2 の式によって粒子の質量 $m_\sharp$ が生ずる．E 枠での定数質量という実際的目的から，このように重大な概念に到達できたのは，まさに想像を超えるものであったとも言えよう．

さらにこのスカラー場 Φ_* は，本質的に標準モデルに登場する Higgs 場とみなすこともできる．普通，後者がすべての素粒子の質量の源と言われているが，我々が議論した重力的スカラー場は，その Higgs 場を作り出す過程に関与したという意味で，さらに根源的な役割を果たしている[2]．

またこの自発的破れは，相対論的量子場の理論のループ効果として**直接的破れ**（explicit breaking）に格上げされる．その効果の一部は，ループ効果の無限大を利用して生じる有限な**量子異常項**（quantum anomaly）の形で生成される．具体的には時空の**次元数正則化**によって計算され*12)，(5.6) で定数となった質量に，新たな時間変動を生じさせる可能性もある*13)．また結合定数としての電荷にも同様な量子異常項としての時間依存性が発生する．

総じて単純な第 1 近似から進んで，複雑だが自己無矛盾な計算を行うための処方が得られる．もう一つ，(5.5) では，物質項が ϕ を含み，従って BD の制約を破っており，その結果 WEP を満たしていない．この効果も，σ と物質の結合とともに，上に述べた量子異常項として再登場し，さらに現実の複雑さを増す．これらは摂動論の意味で比較的小さい効果となるが，やはり今後の精密な実験の対象となるだろう．これらの詳細については文献 2) を参照されたい．

これに対応して，NG 場が**擬 NG 場**となり，ゼロでない質量を獲得する．ちょうど pion が chiral 対称性の擬 NG 場として有限の質量を持つことに相当している[9]．同じ意味で dilaton の質量もゼロではなく，大体 10^{-9} eV 程度と予想され，物質間に働くであろう Non-Newtonian 力[11] の到達距離は 100 m くらいと考えられる*14)．我々の理論は (2.4) に注目することで，多分最も自然な仮定から出発した．また定数の変動が重要な役割を果たす理論の特徴を反映し，特に dilaton と電磁場の結合による効果を取り入れた高強度レーザー実験も提唱されていることを指摘して[2,12]，この稿を終わりたい．

*12） (5.5) における f は 4 次元時空においてのみ無次元となることに注目したい．

*13） ただし (5.4) で論じられたような状況に戻ることはない．しかし，例えば強い相互作用をを持つ陽子と，それを持たない電子との間に差を生むはずで，実験的観測も始められている．例えば文献 10) を参照されたい．

*14） これによって，伝統的な Brans–Dicke 模型が面した太陽系実験からの強い制約を免れることを強調したい．

参考文献

1) Y. Fujii, & K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2003.
2) Y. Fujii, *Entropy* **14** (2012), 1997.
3) A.G. Riess, *et al.*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009; S. Perlmutter, *et al.*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
4) P.A.M. Dirac, *Nature* **139** (1937) 323; *Proc. Roy. Soc.* **A165** (1938) 199.
5) P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall* (Friedrich Vieweg und Sohn), 1955.
6) C. Brans & R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
7) L. Amendola & S. Tsujikawa, *Dark energy–Theory and observations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010.
8) D. Dolgov, In *The very early universe*, Proc Nuffield Workshop, Cambridge University Press, 1982.
9) Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380; J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154.
10) V.V. Ilyushin, *et al.*, *Phys. Rev.* **A84** (2011) 032505; K. Beloy, *et al.*, *ibid* 042117.
11) Y. Fujii, *Nature Phys. Sci.* **234** (1971) 5.
12) Y. Fujii & K. Homma, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 531; K. Homma, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2012** 04D004:10.1093/ptep/pts073.

（ふじい・やすのり，東京大学名誉教授）

特集／次元の作法

単位の歴史

その生まれと育ち

髙田　誠二

1. 生まれと育ち

学者のオーラル・ヒストリーや史上人物の大河ドラマに接すると，個人の生涯と業績を知るには「生まれ」と「育ち」とを区別する必要のあることがわかる．

本稿では，計測の「単位」はどのようにして「生まれたか」，また，どのようにして「育ってきたか」を，数学と物理の歴史の主要項目について通観してみたい．

2. 単位を生んだ社会

古代エジプトで穀物の量，畑地の面積，ピラミッドの傾斜などが計られ，ビールとパンといった物々交換が行なわれていたことは，古文献『アーメス・パピルス』に記されている[1)]．その頃すでに，雌ウシが貨幣替わりに用いられたこと，単位分数が汎用されたことも知られているから，「単位」の概念は生まれていたに違いないのだが，標準器などの道具の詳細は伝えられていない．

たまたま明治の史家・黒川真頼が日本の枡（体積計）の生まれと育ちを伝えているので，現代語で要約してみる[2)]—，

> 古代においてさえ物をはかるには器を使う必要があり，その器を万須と呼んだ．万は實が転じた語，須は巣に通ずる．五穀や木の実を収めておくための器を作り，万須と言った．これで，一家庭なら量が確認でき，近隣の人との貸借も処理できた．が，租税制度が敷かれた後の公共のやり取りでは，外国渡来の器に頼らざるを得なかった（『古量考』）．

こうして，単位の社会的な機能が徐々に樹立されるのだが，その姿は，ながらく「個別的」「局所的」であって，「単位は国ごとに異なり，州ごとに異なったのみでなく，都市ごとにさえ異なり，また同業組合すなわちギルドごとにも異なっていた」のである[3)]．

3. 近代単位の雑多な背景

中国ほかで古来ひろく用いられてきた 10 進の計数と計量の仕組みは，ヒトの指の数に由来するに相違ない．他方，12 進法・60 進法は，1 年 ≒ 360 日という近似の産物であろう．

近代以後の理学者団はギルドとは呼ばないが，たとえばガリレイの対話篇ではイタリアの某地域の諸単位（おおむね 10 進法）が用いられたのに，ニュートンの『プリンキピア』ではヤード・ポンド系（非 10 進法）の諸単位が用いられたという有様だったから，両者の比較は簡単ではない．

鉱業・医薬業に詳しかったドイツ人アグリコラ（1494～1555）が欧州各地の古単位を系統付け，オランダの理工学者ステフィン（1548～1620）が 10 進法のメリットを唱道した（1585）[1)]のは，近代的な単位群を「育てる」ことへの地道な貢献となった．

後にフランスの数理物理学者フーリエ（1768～1830）が，『熱の解析的理論』（1822）で物理量の

「次元」の考えを提示したのは，本特集が着目する「作法」の原典として意義深い．

4. 国境を超えて——ギルドに共通して

社会の近代化と相まって，人類の活動は地域・国境を超えて一途に拡大され，交通・物資流通・交易などにかかわるインフラストラクチャーは著しい変化を余儀なくされた．単位も，もはや，「国ごとに異なる」では済まされない．19 世紀末以後のフランスの革命思想と外交上手が功を奏し，やがて，メートル系の単位に優位が与えられるのだが，この際，メートルという名，メートル法という戸籍の「生まれ」を，たどっておく—長さの単位の名称としてのフランス単語 mètre は，革命期フランスの科学アカデミーの会議（1791）で物理のボルダ（1733〜99）が古典語 metron に基づいて提案し承認されたものであるが，それに先立って，イタリアのブラッティーニは，半周期 1 秒の振り子の長さを mètre catholique（普遍的・教典的なメートル）と呼んだ（1675）とも伝えられている[3)]．

いっぽう，単位系の名称としてのフランス語 système métrique は，広義の計量単位系を指す語として古来もちいられてきたが，革命期の第 3 年ジェミナール 18 日（1795 年 4 月 7 日）のフランス基本法の中で Système métrique décimal と，「10 進法」を明記した形で採用された[3)]．

こうして単位は，王の足や権威者の腰幅などから脱却し，一般性ある物理的な実体たとえば地球の寸法，水の密度，. 天体の運動から，さらに後には原器や普遍定数で定義されるに至る．この傾向に関して，中国漢代に長さ基準器とされた黄鐘管は，特定の周波数で鳴る竹笛の長さで定義された点で，また，笛の中に特定個数の穀粒を入れて体積や重量の基準としたという点も含めて，メートル法の発想の一端を先取りしたものと評され，フランス語文献[3)]にさえ紹介されている．

5. 現代の単位へ

さて，国際メートル条約は 1875 年 5 月 20 日に締結され，日本は 10 年後それに加盟し，国を挙げて実績を積み上げてきた[4)]．

ところが，その間の学術の進展は，「メートル系」単位そのものの新たな多様化をもたらした—周知の例は，電磁気の学術での単位系群に見られる—静電か電磁かガウスか，CGS か MKS か，有理か非有理か，3 元か 4 元か 5 元か等々[5, 6)]．「国境」はもはや撤廃されたが，敢えて言えば各「ギルド」—強電と弱電，実験室と産業現場，電気工学・通信工学・電子工学など—での便不便・煩簡の差があらわになったからとも解されよう．

それに似た推移は，力学（とりわけミクロの）vs. 機械工学・建設工学・宇宙工学といった分野間にも見られたに相違ない．

幸いにも 20 世紀の初頭，2 人の先達の見識が，その後の戦略に指針を与えてくれた—

プランク（1900），基礎物理定数による単位群；
ジョルジュ（1901）[7)]，MKSX 系のち MKSA 系．

今日の国際単位系（SI）が MKSA 系の拡張であること，そしてまた，SI が普遍定数をベースとして再定義されつつあること，どちらも，本特集の別項で詳論されるものと期待して，単位の「生まれ」と「育ち」をめぐる略説を閉じたい．

参考文献

1) カジョリ著，小倉金之助・補訳『初等数学史』，復刻版（小倉欣一），共立出版，1997 年，p.29, p.218.
2) I. ホワイトロー著，冨永星訳『単位の歴史』，大月書店，2009 年，解説（高田），p.228.
3) H. Moreau; *Le Système Métrique*, Chiron, 1975.
4) 産業技術総合研究所『きちんとわかる計量標準』，白日社，2007 年.
5) U. Stille; *Messen und Rechnen in der Physik*, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1955.
6) 髙田誠二『単位と単位系』，共立出版，1997 年 p.42.
7) C. Egidi, ed.; *Giovanni Giorgi and his contribution to electrical metrology*, Politecnico, Torino.

（たかだ・せいじ，北海道大学名誉教授）

数学と次元

次元の多様性と無次元化する物理学

加藤　晃史



1. はじめに

次元とは，そもそも空間の広がりの程度を表す一つの量である．しかし何を「空間」と考え，その拡がりを「どのように測るか」は，状況に応じて実に多様であり，次元概念の奥深さ，不思議さもそこに隠されているように思われる．

2. ベクトル空間の次元

数学的にきちんとした次元の定義に最初（で最後？）に出会うのは，おそらく線型代数であろう．体 K 上のベクトル空間 V の次元 $\dim_K V$ の定義としては

- **(i)**　1 次独立なベクトルの最大の本数,
- **(ii)**　生成系をなすベクトルの最小の本数,
- **(iii)**　増大部分空間列 $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$ の長さ n の最大値

などがあり，これらはすべて同じ「次元」を定める．次元はベクトル空間の完全な不変量—ベクトル空間は次元が等しいときに限り同型—である．

ベクトル空間 V が n 次元のとき，その基底 $E = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を任意に固定すると，それらの線型結合を作るという写像 $\psi_E : K^n \xrightarrow{\sim} V$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$ が全単射となり，座標関数 $\phi_E = \psi_E^{-1} : V \to K^n$ を通じて任意のベクトルを数値の組によって一意的にコード化できる．これがデカルトの発見した「座標化」という，幾何と代数を繋ぐ考え方である．「座標化に必要なデータの大きさ」として拡がり具合を測るのがベクトル空間の次元だといえる．

3. 曲がった空間の座標化と次元

ベクトル空間のようなまっすぐな図形だけでなく，曲がったり尖ったりした図形 X についても同様に「座標化」を考えるにはどうすればよいか？ 点に座標が対応しているとき，点が動けばその値は変化する．つまり，「座標化」とは図形 X 上の適切な「関数」を見出すことだといえる．

ベクトル空間と座標系とは独立な概念で，次元のように本質的な量は，座標系（≒基底≒観測者）の選び方に依らない（特殊相対性原理）．一般の図形 X でも，図形そのものと座標系の選択とは独立であるべきだ（一般相対性原理）．従って，X 上の「特定の関数」ではなく，X 上「（少なくとも局所的に）定義し得るすべての関数の集合」$\mathcal{O}_X$ にこそ，図形 X の本質が反映されていると考えるべきである．

$\mathcal{O}_X$ が持つべき性質とは何だろうか？ 数学者たちはまず，それらが「可換環をなす」ことに注目した．可換環とは，体の公理から「任意の $a \neq 0$ に対し逆元 a^{-1} が存在する」，「$0 \neq 1$」という条件を除いた代数系，要するに割り算以外の「加減乗」が自由にできる数の体系である．その典型的な例は，整数全体 $\mathbb{Z}$ や多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$，あるいは滑らかな多様体 M 上の滑らかな関数全体 $C^\infty(M)$ などである．$C^\infty(M)$ の積は各点ごとの値の積 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ で定義され，量子力学における「確率振幅の積」に相当する．点の座標を知ると言うことは，その点における関数の値を「測定する」ことにあたるが，それは $\mathcal{O}_X \to K$ という環から体への準同型を考えることに他ならない．

複雑な図形の場合は 1 枚の地図ではその形を正確に表現できないので，いくつかの地図（≒座標系≒可換環）を貼り合わせる必要がある．局所的に定義された可換環を「貼り合わせる」ことも，環準同型を用いて代数的に定義することができる．このように「可換環によって座標化できる対象」を「幾何学的対象」と同一視する概形（スキーム）の考え方は，整数のような純粋に代数的な世界にも幾何学的な研究手法を持ち込むことが可能とし，現代数学推進の原動力の一つとなった．

時空という幾何学的対象が可換環で表されるとすれば，ゲージ理論に現れるベクトル束にあたるものは何

だろうか？ それが環上の加群という概念である．ベクトル空間の場合，線型結合の「係数」は体 K の元であった．これをもっと一般の環 A の元でもよいとした構造が A 上の加群（A-module）の考え方である．1次結合の係数を「体」から「環」に取り替えることは，いろいろな量が時空の各点で異なっても良いということを意味し，物理でいう「場」を考えることに相当する．

ベクトル空間の「次元の定義」(i)〜(iii) も，環上の加群に移植することができる．しかし，その結果はお互いに食い違いを見せ始め，我々がベクトル空間の次元に対して抱いているイメージからも乖離してくる．例えば (i) の「1次独立な元の最大値」による定義を環 A 上の加群 M に移植したものは，M のランク（階数）と呼ばれる．自由加群 $A^n = A \oplus \cdots \oplus A$ のランクは n である．また，物理で「場の自由度の数」と呼ばれているものは，たいていランクを指している．ランクはベクトル空間の次元と定義は非常によく似ているが，その性質は，我々がベクトル空間の次元から期待するものとはほど遠い．例えば，$\mathbb{Z}$ 加群（=可換群）$M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のランクは 2 だが，M のすべての元が1次独立な2個の元 $m_1, m_2 \in M$ の $\mathbb{Z}$ 係数1次結合 $a_1 m_1 + a_2 m_2$ として表せるわけではない．また，$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は無限個の生成元を必要とするので (ii) の意味では「無限次元」だが，すべてが捻(ねじ)れ元（$m \neq 0, a \neq 0$ だが $am = 0$ となる $a \in A$ が存在する）ので，(i) の意味での次元である階数は 0 である．これらは非常に人工的な例と思えるかも知れない．しかし，例えば近年の弦理論での標準的な考え方—D-branes とは連接層の導来圏の対象である—という哲学のもとでは，$\mathcal{O}_X$-module こそ物理的な研究対象なのである．インスタントンは「(i) の意味の次元」は 0（support が点）だが，「(iii) の意味の次元」であるインスタントン数はいくらでも大きくなれる．

量子力学を知る我々にとり，環を可換環に制限すべき理由はなく，より一般の非可換環やその加群のなす圏の構造を調べることは非常に重要である．例えばハイゼンベルグの交換関係 $P_i Q_j - Q_j P_i = \delta_{ij}$ で定義される Weyl 代数の連接層の理論こそ，佐藤超関数の発展形である $\mathcal{D}$ 加群の理論である．また，箙に付随する path algebra の表現論は，弦理論や数理物理学のホットな話題である．ここまでくると「空間」という概念もかなり多義的になり，広がり具合を測る「次元」の定義にも，ホモロジー代数を用いたものや，母関数の増大度を用いたものなど，用途に応じて様々なものが登場する．場の理論の双対性の研究が進めば，このような多義性が相互に関係し合い，どのように統制されているかについても理解が深まるだろう．

4. 無次元化する物理学

様々な「物理量」はそれぞれ自然な単位を持つ．力学的な物理量は「時間」T「長さ」L「質量」M の組合せで表されることが知られている．例えばエネルギーは ML^2T^{-2} という「次元」を持つ．次元解析が機能する背景には，「物理法則はこれら L, M, T の物理量を測定する単位系の取り方に依らない」という，いわば物理量の空間（3次元）における相対性原理の結果である．

しかし，理論が深化して「統一」されるたびに，スケール変換の自由度はどんどん減少してきた．すなわち，光速度 c, Planck 定数 $\hbar$, 重力定数（Newton 定数）G という3つの普遍定数の発見により，我々の宇宙には L, M, T の自然な単位（Planck スケール）

$$l_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m},$$

$$m_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg},$$

$$t_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\,\mathrm{s}$$

の存在が明らかになった．これらを自然な尺度とするような，相対論・量子論・重力を包摂する統一理論がもしあるとすれば，すべての物理量は次元を持たず，物理法則は，純粋な「数」の間の関係を予言する理論となる．そのような理論は数学そのものに限りなく近く，物理法則と数学的定理の差異はほとんどなくなるはずである．このような無次元化する物理において，最後まで重要な次元概念は何だろうか？ それはおそらく，「状態数の母関数の増大度」で定義されるような次元であり，Riemann のゼータ関数と同様に，分配関数を解析接続したときの零点や極の位置と密接な関わりを持つだろう．無次元の物理学が成熟したあかつきには，それらの「次元」は，時空構造の相転移点のような極めて物理的な意味合いを帯びて，我々の目前に立ち現れるに違いない．

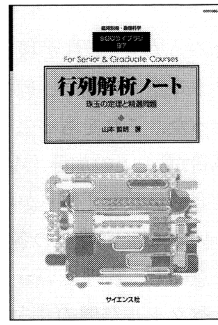
（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

書評

BOOK REVIEW

行列解析ノート
珠玉の定理と精選問題

山本哲朗著，B5 判，216 頁，本体 2000 円，サイエンス社



本書は同じ著者による『行列解析の基礎』，SGC ライブラリ 79（2010；以下前著と引用）の続篇である．しかし前著が副題：「Advanced 線形代数」の通り線形代数学の教科書なのに対し，本書は論文集ないし話題集であって通読するのは必ずしも適切でない．

念のために目次（章名）を挙げる．

第 1 章　優雅な定理たち（全 5 節）
第 2 章　Hardy-Littlewood-Pólya の定理とその周辺
第 3 章　直交多項式と 3 重対角行列
第 4 章　一般逆行列
第 5 章　トレースとトレース関数
第 6 章　非線形反復法
第 7 章　補遺（全 8 節）
腕試し問題 精選 55（基礎・中級・上級）と解答

これでもわかるように内容は「線形代数」に限らず，解析学関係，特に不等式にかなり重点をおいている．もっとも書名が「行列解析」であり，分野の sectionalism は論外なのだが．

初めの 2 章は前著の延長・補充といった印象を受ける．内容を詳しく紹介しないと不完全だが，第 1 章は次の 5 節からなる：Price の定理，行列式に対する相加平均と相乗平均の不等式，逆行列に対する凸不等式，固有値の評価定理，Horn の不等式と Fan の不等式．

最初の Price の定理は，狭義優対角行列（$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$）の行列式を評価する不等式である．この章はむしろ「優雅な不等式たち」と題したい内容である．

第 2 章も不等式関連だが，諸定理の相互関連を調べ，二重確率行列の集合は置換行列全体の凸包として与えられるという Birkhoff の定理の「代数的証明」をしている．これにはグラフ理論の立場からの証明が割合に知られているようだが，扱い方が面白い．

それに続く 4 章は，それぞれ別の話題だがよくまとまっている．第 3 章は正の重み関数に対する直交多項式系の一般論から始まる．そのような直交多項式系は三項漸化式を満足し，それは三重対角行列の固有値や固有ベクトルと密接に関連している．そのこと自体はよく知られた事実だが，それを特に Chebyshev 多項式および修正 Chebyshev 多項式の場合について，詳しく具体的に論じている．その応用として 2 点境界値問題の離散近似から生じる三重対角行列の逆行列が，Green 関数と密接に関係していること（ある意味で当然？）を述べている．

第 4 章は Moore-Penrose の一般逆行列の簡にして要を得た入門である．幾何学的意味を含む基本性質と具体的な計算法を述べ，最小二乗法への応用を扱う．最後に Drazin 逆行列を論じている．

第 5 章はトレース（跡和；行列の対角線成分の和）の思い掛けない応用例である．短い（8 ページ）章だが，行列式関数の微分も扱っている．

第 6 章は前著の最終章：「線形反復法」の続篇的な内容だが，Newton 法および Broyden 法の原理を要領よく解説している．Fréchet 微分なども扱い，応用として陰関数定理の別証を示している．

最後の第 7 章は凸関数や n 次元の極座標などを含めて，論じ残した基礎的知識集である．

本書の一つの特色は巻末の精選問題とその解答だろう．それだけに全体の 1/4 ほどのページを費している．大学院入試問題に使われたものもあり，実力を試すよい題材と思う．

全般的に本書は，数値解析の専門家が行列にどのように対処しているかを示す典型例である．通読する教科書ではないが，必要に応じて必要な個所を参照・学習するとよい手引き書である．線形代数に限らず，不等式や解析学の諸分野についても，知っていて損はしない知識や面白い別証が多い．その意味で専門分野を問わず「数学の教養書」としても活用したい名著と思う．

一　松　信（京都大学名誉教授）

科学と社会

Science & Society

第12回　国家・学問・戦争の諸相

北里柴三郎と山極勝三郎

医学研究の躍進と国際評価

岡本　拓司

前々回，前回は，明治期にすでに科学が一般社会との間で摩擦や衝突を生じさせていたことをみた．その一方で，日本の科学者は着実に，すでに国際的な水準の研究成果を挙げてもいた．今回はそのうち，第一次大戦前後までに目覚しい成果を挙げた医学者に注目し，特に北里柴三郎（1853–1931）と山極勝三郎（1863–1930）を取り上げて，彼らの研究の一部と，それに対する国際的な評価を紹介する．

12.1 戦前期のノーベル賞候補

明治維新以降，日本は，段階的にではあるがそれ以前とは異なる大きな規模で科学を学問や教育の中に取り込み始めた．驚くべきことに，そこから20年程度を経た時点から，すでに国際的な水準に達する成果が現れるようになった．明治22年（1889年）には北里柴三郎がドイツのコッホ（Heinrich Hermann Robert Koch, 1843–1910）の下で破傷風菌の培養に成功し，血清療法確立のための重要な材料を提供した．北里の成果は外国で挙げられたものであったが，明治30年（1897年）にはこの北里の指導下で志賀潔（1871–1957）が赤痢菌を発見した．また，明治34年（1901年）には緯度観測の分野で木村栄（1870–1949）がZ項を発見し，明治36年（1903年）には長岡半太郎（1865–1950）が土星型原子模型を発表した．

日清・日露戦争後には，大国を破って「一等国」となったという意識の高揚もあり，鈴木梅太郎（1872–1943）によるオリザニンの発見（1910年），本多光太郎（1870–1953）の金属学・磁性の研究，山極勝三郎による人工癌の発生（1915年）など，さらに充実した成果が発表された．この流れは，第一次大戦中に多くの研究者が自給体制の確立のために動員されて一時期中断する．しかしそのとき（明治維新後半世紀程度である），日本人にとって，世界の研究の最先端は決して手の届かない彼方にあったわけではなかった．

日本における科学研究の始動は，この国の学問の担い手たちの一部が，江戸時代までに日本人が経験しなかった規模での国際的競争に参加し始めたことも意味していた．ここで浮かぶのは，彼らはいったいどの程度の戦いを挑むことができたのかという疑問である．より具体的にいえば，彼らの研究は，国際的な基準ではどのように評価されたのかという問題である．

研究を評価するための指標を得るのは，それほど容易ではない．国内では著名な研究の国際的評価が低い例，あるいはその逆もある．正確な判断を下すためには，個々の研究が置かれた国際的な

状況を，煩を厭わず分析する必要がある．

便法としては，しかし，例えばちょうど20世紀と同時に始まった制度であるノーベル賞を用いることができる．といっても受賞者は，日本から初めて出るのが1949年のことであるために，指標にはできない．戦前期に関して用い得るのは，推薦状や選考の情報である．

ノーベル賞の選考は全世界から集められた推薦状に基づいて行われる（ただし推薦は投票ではなく，推薦の数は選考結果を決定しない）．推薦は，賞の威信が高まるにつれて，様々な思惑に基づいて行われるようにもなったが，利害関係などを十分検討すれば，推薦されている研究への国際的な評価を知る手がかりを得ることが可能である．また，授賞団体による審査は，関わった人々の立場を反映する面はあるものの，比較的客観性の高い評価として用いることができる．授賞から50年を経た賞の資料は，1974年より研究者向けに公開されており，科学史などの研究に用いられてきた．

公開されている選考資料によれば，第一次大戦前後までの研究でノーベル賞に推薦されている日本人は，おおよそ以下の通りである[1]．物理学賞：本多光太郎（1932年）．化学賞：秦佐八郎（1911年），鈴木梅太郎（1927年，1936年）．生理学医学賞：北里柴三郎（1901年），秦佐八郎（1912年，1913年），野口英世（1913–15年，1920–21年，1924–1927年），鈴木梅太郎（1914年），井戸泰・稲田龍吉（共同で1919年），山極勝三郎（1925–26年，1928年，1936年）．なお，秦佐八郎（1873–1938）の業績はエールリヒ（Paul Ehrlich, 1854–1915）の下で梅毒の薬であるサルバルサンを開発したこと（1909年）であり，井戸泰（1881–1919）・稲田龍吉（1874–1950）の業績はワイル病の病原体の発見（1914年）である．

生理学医学賞は被推薦者が多いが，中でも北里が初回の候補となっている点が目を引く．また，周辺の情報も含めて判断すると，上記の被推薦者たちのうち受賞の可能性が実際に高かったのは，後述するとおり山極であった．以下ではこの2人を取り上げて，彼らの研究の概要を瞥見し，さらにノーベル賞関連の資料を用いて国際的な評価についても検討する．

12.2 北里柴三郎：破傷風研究とペスト菌発見

北里は多岐にわたる活動を展開しているが，以下では，ノーベル賞に推薦された際の業績，破傷風の研究とペスト菌発見を中心に紹介する．

北里は明治4年（1871年）から明治7年（1874年）まで熊本医学校で学び，次いで明治8年（1875年）に東京医学校に入学した．明治16年（1883年）4月に在学のまま内務省の雇となり，次いで同年7月に東京大学医学部（明治10年（1877年）に東京開成学校と東京医学校が合併して東京大学となった）を卒業した．当時は，卒業時の成績がよければ，文部省の費用で（主としてドイツへ）留学したのち母校に迎えられるのが通常であったが，北里は16人中8番の成績であって叶わなかった．しかし，明治18年（1885年）には内務省より細菌学・衛生学の研修のためにドイツに派遣された．

ドイツのコッホの下で研究を始めた北里は，チフス菌やコレラ菌の培養と観察を行い，さらに嫌気性の気腫疽菌の純粋培養に成功した．水素ガスを用いた嫌気性細菌の培養の技術により，次いで破傷風菌の純粋培養にも成功し，破傷風の病原の確定を実現した．こののち，コッホの勧めによって，ジフテリアの研究を行っていたベーリング（Emil Adolf von Behring, 1854–1917）と共同研究を行うようになった．

ベーリングと北里の共同研究の成果は，1890年に，「動物におけるジフテリア免疫と破傷風免疫の成立について」[2]という論文として発表された．これは，動物における免疫の成立の発見，および，免疫動物の血液が毒素を中和する能力を持つことの発見を報じた画期的なものであったが，ベーリングと北里が単独で発表したジフテリアと破傷風に関する論文[3]と合わせて検討すると，共同研究における二人の役割の分担が理解できる．つまり，免疫動物の血液が毒素を中和する能力をもつことを発見し，免疫や血清療法の理論を構築したのは

ベーリングであったが，自身が研究していたジフテリアでは実験は成功せず，北里の担当していた破傷風では良い結果が得られた．その結果，共著論文中で挙げられている具体例はすべて破傷風に関するものとなった．

補助的な役割であったとしても，免疫や血清療法の研究において北里の果たした役割は大きい．しかし，北里を送り出した内務省は，明治20年（1887年）には，細菌学の研究は早々に終え，衛生学の大家ペッテンコーフェル（Max Joseph von Pettenkofer, 1818–1901）の下に移るよう要請した．北里は研究の継続を望んで抵抗し，内務省から留学延長の許可を得たが，3年後に望んだ再度の留学延長は許可されず，留学費は宮内省から給付されることとなった．しかし，内務一等技手の休職期限は明治25年（1892年）1月には切れ，4カ月後に帰国した際，北里は無職であった．

最初の留学延長の際に北里が書いた願い出には，二種類の下書きがあり，うち明治20年12月30日付けのもの[4)]は，この時代に学問に向かった若者が何を意識していたかをよく物語っている．書状は，「国権を拡張し国威を万国に轟かす」方法には，兵力，財産，工芸などがある，という文章から始まる．北里は，「学事を専門とするものはまた各々其専門の学を以て万国の学者に接して一歩も譲らざることを務むべし」と考えるが，「我邦専門学者にして其専門学科を以て万国の人に知られ信用せらるるもの今日に至る迄未だ一人も顕出せざるは実に我邦学事の一大欠点」であると観察する．北里もまた，学問の世界で日本人が世界から注目される存在になることを目指していたのである．

最終的に提出されたものに近いと思われる，明治21年（1888年）1月16日付けの下書き[5)]は，論調はやや穏やかになっているが，それでも，3, 4年の留学では日本では信用は得られても「欧州学術社会に信を得る」ことはできず，留学延長を希望するのは，「充分の信用」を得て「東洋に於ける其専門に関する調査は之を負担し」，「欧州の学者信じて疑わざるに至る」ようになるためであると主張している．ここでは，西洋社会において，自身が日本の医学者として信頼を得て，東洋から学問上の発信を行うことが目標とされている．

帰国後の北里は，内務省や帝国大学医科大学には拠点を得ることができず，福沢諭吉（1835–1901）が建物を，大日本私立衛生会が運営資金を提供して設立された大日本私立衛生会伝染病研究所（伝研．段階を経て明治32年（1899年）に内務省所管の国立研究所となる）に所属した．伝研は，設立当初から，北島多一（1870–1956）や志賀潔を擁し，またのちには秦佐八郎や野口英世（1876–1928）も加わって，帝国大学医科大学に比肩する医学研究と医療の拠点となった．さらに北里自身も，中国に広がりつつあったペストをめぐって，破傷風菌培養に次ぐ成果を挙げることとなる．

北里がペストの調査を開始したのは，明治27年（1894年）6月からのことである．内閣の調査命令により，医科大学の青山胤通（1859–1917）らとともに6月12日に香港に到着すると，6日間のうちに病原菌を確定し，結果を内務省に伝えた．7月7日にはドイツ語でペスト菌発見の報告を書き，香港の英国立病院副院長のローソン（James A. Lowson, 1866–1935）の協力を得て英文に直したものを，イギリスの有力医学誌，『ランセット』に送った．北里とローソンの報告は8月25日号に掲載されている[6)]．

同時期，フランスのパストゥール研究所のイェルサン（Alexandre Émile Jean Yersin, 1863–1943）も，北里とは独立にペスト菌を発見した[7)]．香港のペストは，各国がそれぞれの医学研究の威信をかけて対策を講じた対象であった．

北里の発見した菌は，ところが，イェルサンの菌とは異なっていた．特に重要であったのは菌のグラム染色に関する性質の違いである．明治28年（1895年）6月には，青山が両者を比較した長文のドイツ語論文[8)]を書いて（出版は明治30年）北里の発見を疑問視し，イェルサンの発見した菌をペスト菌であるとした．以後，一部ではペスト菌には二種類あると信じられるなどの混乱も生じたが，明治32年11月，関西に上陸したペストの調査で神戸に滞在している間に，北里は，中央衛生会の緒

方正規（1853–1919）と中浜東一郎（1857–1937）に対し，イェルサン菌がペストの病原菌であることを認めた．また，パストゥール研究所に滞在していた海軍軍医の矢部辰三郎（1863–1924）は，ヨーロッパではイェルサン菌のみがペスト病原であることは確定していると伝えていた[9]．

香港での調査では，青山がペストにかかって倒れるといった事態が生じており，北里に何らかの手違いが生じたのであろう．藤野恒三郎（1907–1992）は，当時撮影された顕微鏡写真などをもとに，北里の発見した菌は確かにペスト菌であると判断している[10]．

12.3 ノーベル賞候補としての北里

上述の2つの業績により，北里は第1回のノーベル生理学医学賞に推薦されている．推薦者は1名で，ブダペストの薬学教授ボケイ（Árpád de Bokay, 1856–1919）である．ボケイは，破傷風の抗毒素の発見を現代医学の新しい時代を切り開く業績として称えてベーリングと北里の両者を推薦し，北里についてはイェルサンと独立になされたペスト菌の発見も推薦に値すると述べている．ベーリングとルー（Pierre Paul Émile Roux, 1853–1933）が独立に行ったジフテリアの抗毒素の発見は，破傷風の抗毒素の発見よりあとになされたので，推薦しないと断ってもいる．ボケイは北里の業績をベーリングに次ぐものとしているが，ベーリング・北里論文で成功している材料が破傷風であることに注目している点は慧眼であるといってよく，また北里のペスト菌発見にイェルサンの発見と独立した意味を認めている点も注目に値する．ただし，後年（1904年）のことであるが，ヨーロッパでは真正なものと認められていたイェルサンのペスト菌発見であっても，ノーベル賞委員会は受賞に値するとは判断していない[11]．

推薦状が集計されると，次は授賞機関であるカロリンスカ研究所に設けられたノーベル賞委員会による候補者の選考が始まる．有力候補者については業績を評価する報告書が作成されるが，北里はベーリング（推薦状は5通）についての評価書の中で僅かに触れられているのみである．報告者の1人，アルムクヴィスト（Ernst Bernhard Almquist, 1852–1946）は，血清療法の発見やその理論の確立はベーリングの研究の成果であり，コッホや北里による本質的な貢献はないと観察している．また，血清療法の最初の成功例が破傷風であった点については，破傷風菌の実験のほうが技術的に容易であったためであると判断している．

一方，ベーリングはジフテリアの血清療法の発見者として高く評価されており，ルーとイェルサンによるジフテリアの毒素の分離（1888年）や，ルーによる臨床面でのジフテリアの抗毒素の活用（1890年代前半）は，受賞には値しないと看做されている．ただし，ベーリングに関するもう1人の報告者，スンドベリ（Carl Sundberg, 1859–1931）は，ベーリングの業績は，1890年代を代表する業績ではあるが，1901年に受賞するにはすでに古すぎるとの結論を提示しており，ノーベル賞委員会もこれに従った．

ノーベル賞委員会は，絞った受賞者候補をカロリンスカ研究所の教授会に報告し，ついで教授会が投票して最終的な受賞者が決定する．委員会が1901年の賞の候補として推薦したのは，マラリア原虫がハマダラカの胃の中に生息していることを発見し，マラリアの感染経路を明らかにしたロス（Ronald Ross, 1857–1932）と，狼瘡の光線治療法を発見したフィンセン（Niels Rydberg Finsen, 1860–1904）であった．少数意見には，消化の生理学で大きな業績を挙げたパヴロフ（Иван Петрович Павлов, 1849–1936）を推すものもあった．専門分野および臨床・基礎の分裂があり，委員会は候補を1人に絞ることができなかった[12]．

教授会が最終的に受賞者に決定したのは，しかし，ベーリングであった．初回のノーベル賞であり，賞を異なった業績に分けて与えるのを避け，よく知られており異論の出にくい人物1人に絞ろうという意向が働いたものと思われる．免疫の発見という点で基礎医学上の貢献が大きく，血清療法という臨床医学上の意義も大きい領域を切り開い

たベーリングの受賞には，多くの医学者が賛同したものと思われる[13]．

ベーリングの業績は古いというのが難点であったが，彼の発見の実用上の価値に関しては 1895 年まで議論が続いており，業績の意義が完全に明らかになったのは比較的近年であるともいえる．さらに，物理学賞はレントゲン（Wilhelm Conrad Röntgen, 1845–1923）のエックス線の発見（1895 年）に，化学賞はファント・ホッフ（Jacobus Henricus van't Hoff, 1852–1911）の希薄溶液の浸透圧に関する法則の発見（1880 年代）に対して与えられた．他の賞が業績の成立した時期をあまり考慮していないように思われることも，ベーリング受賞への抵抗感を薄めたであろう[14]．

ベーリングが血清療法を確立した論文が北里と共著のものであったために，今日的な観点からは，北里も受賞すべきであったようにも思われるが，上述の経緯からは，初回のノーベル賞が複数の人々に分け与えられる余地はなく，1 人が受賞するとすればベーリング以外に選択肢はなかったことが分かる．血清療法については北里が共同研究者であったが，ジフテリアに関してはルーやイェルサンの貢献も無視しがたく，受賞者を複数にする決断がなされたとしても，結果として公平な受賞を実現するのは困難であったであろう．

12.4 山極勝三郎と人工タール癌

山極は北里に比べれば知名度は低い．しかし，その主要業績である人工タール癌の発生は，癌を人為的に作ることに世界で初めて成功したという意味からも，ウィルヒョウ（Rudolf Ludwig Carl Virchow, 1821–1902）の癌の発生に関する反復刺激説を立証したと看做されたという学術上の意義からも，また実験で用いる癌の入手を容易にしたという実用上の価値からも，医学史上，高い位置を占めている．また，この山極がノーベル賞を受賞しなかったという事実は，日本の医学界のノーベル賞への理解にも影響を及ぼすこととなった．

山極は信州上田の下級武士，山本家に生まれ，幼いころから成績の良いことで地域では広く知られていた[15]．銀行の帳簿係に推されたこともあったが，生家が困窮していたにもかかわらず，大志を抱いていた山極は，必死に抵抗したという．次いで，上田藩の御典医の家系，山極家が養子に望んだが，医師に魅力を感じなかった山極は当初はやはり強く抵抗し，教師の説得の末にようやく山極家への入籍に同意した（明治 12 年（1879 年））．

以後，明治 21 年に帝国大学医科大学を卒業するまで，成績は優秀であり続け，卒業後に医科大学助手，明治 24 年（1891 年）には助教授に就任し，ドイツ留学を命ぜられた．これ以前に，養父の病気（明治 16 年）により生家のみならず養家も困窮に陥っており，臨床に進むことを勧める声もあったが，山極は，性格ゆえか宿志ゆえか，基礎医学の病理学を選択した．なお，自身も，明治 23 年（1890 年）には結核に罹患していることを確認しており，以後は病身を気遣いながら研究・教育生活を送ることとなった．

山極の研究は，脚気や急性伝染病の病理学，腫瘍病理学など多岐にわたっている．このうち癌研究については，ドイツ留学でウィルヒョウに接した後，日本に戻って（明治 27 年）からも人体の腫瘍の観察を続けた結果，癌は環境の変化によって生ずるものであると信ずるようになり，これを実験によって示すことを目指すようになった．当時，癌の発生に関しては，反復的な刺激が通常の細胞を癌化させるとするウィルヒョウの反復刺激説，胎児期に迷い込んだ他の臓器の芽が増殖するというコーンハイム（Julius Friedrich Cohnheim, 1839–1884）の迷芽説，癌化する素因をもった細胞が先天的に存在するというボルスト（Max Borst, 1869–1943）の素因説があったが，山極が正しさを確信したのは反復刺激説である．

帰国後の山極の癌研究の成果は，明治 38 年（1905 年）に刊行された[16]．ここから，山極が癌研究を本格化させるまでの間に，癌研究会（明治 41 年（1908 年））が発足しており，医学界が挙げて癌研究を支援する体制が築かれていた．

癌研究会は，日露戦争後の社会の気分の高揚を

背景に発足した組織であり，明治40年（1907年）の国際癌研究調査会への参加要請が誕生の直接的な契機であった．癌に関する国際的な研究組織は，ドイツを中心に明治33年（1900年）から具体的な形を取り始めていた．癌研究会の設立発起人の1人である本多忠夫（大正2年（1913年），海軍軍医総監，大正4年（1915年），海軍省医務局長）は，設立の経過報告の中で，世界共通の課題として結核・梅毒・癌を，国内の課題として癩・脚気・ペストを挙げ，これらのうち癌と脚気以外は病原・病理が解明されていると指摘したのち，脚気は国内に留まる問題であり臨時脚気病調査会も設けられていることから，人類共通の問題である癌に取り組むべく，医学者たちが自発的に研究会を組織した旨を述べている．初代総裁の桂太郎（1848–1913）も，研究会の事業が人道的・学術的であるのみならず，日露戦争後の日本が列強の間に伍する体面を保つためにも，また日本の医学が長足の進歩を遂げたことを示すためにも，促進されるべきであると論じた[17]．

同様の主旨でより広く知られているのは，初代会頭の青山胤通の「開会ノ辞」[18]である．青山は，癌研究への参加について国際的な勧誘がありながら断ってきたのは，先進国と合同するのがおこがましいという意識があったためであるが，日露戦争後は「我帝国の位地は欧米の最強国と伍伴を列することにな」ったため，もはや謙遜もできないと言う．そのうえで，今日では「武力」や「金力」のみで「国際間の同情と尊敬」を得ることはできず，「国民が文化に向って多大なる進歩を与える所のもの」こそ国際的に尊ばれるのであるから，癌研究会における日本の研究者の研究が，欧米の先進国のそれよりも優れていれば，それによって得られる「同情と尊敬」は，「彼の数十億万の金を投じ，数十万の人命を賭して得たる所のものよりも」多いであろうと指摘する．この時期，学問の世界に生きる者たちには，日露戦勝でも得られなかった国際的な評価を求める動きがあり，医学界ではこれが癌の研究の推進に結びついたのであった．

同時代に生きていても，長岡半太郎のように，「日本人は日露戦争後列強の伍伴に入ったと鼻を高くし」[19]ているが，「欧州人がなしたらば余り喋々せぬものを」西洋人に褒められて喜んでおり，日本人を軽んじている彼らの「真意」が見抜けていないと指摘する科学者もいた．また，夏目漱石（1867–1916）の『それから』（明治42年（1909年）連載）には，主人公の代助が，「何故働かない」と問われて，「日本と西洋の関係が駄目だから働かないのだ」と，一見意味不明な弁解をする箇所がある[20]．彼なりの説明では，日本は西洋から「借金」でもしなければ「到底立ち行かない」が，にもかかわらず「一等国を任じている」．そして「無理にでも一等国の仲間入りをしようとする」．「一等国だけの間口を張っちまった」が，張れるだけ悲惨であり，「牛と競争する蛙と同じ事で，もう君，腹が裂けるよ」というのである．国民や社会にとって必ずしも喫緊の課題ではない癌の研究に進出する日本の医学者たちの姿に重ならないわけでもない．

山極は，しかし，癌研究会からの支援を受け，やはり国際的な評価を意識しながら，癌研究を進展させた．彼が創刊した学術誌『癌』の発刊の辞（明治40年）の結びでは，同誌が独・英・仏語の抄訳を掲載する理由について，「欧米の我が尊敬する師，並に同業諸氏に，吾人も亦癌の研究に参与しおることを示し，又出来得べくんば，他日吾人が僥幸にも癌の発生原因が先ず本邦に於て発見せられたりと主張するの光栄を得ば速かに氏等に報道することを得んが為なり」[21]と述べている．

タールが癌を発生させることは，1775年にポット（Percival Pott, 1714–1788）が指摘していた．また，19世紀には，パラフィンやアニリン，シャルラッハ・ロートなどの色素にも発癌性があると考えられるようになり，1910年代までには，ラットや犬などを用いて人工的に癌を発生させようとする試みも行われたが，成功は見なかった．山極も，明治41年頃から，上述のような化学物質と，ラット，マウス，ウサギなどの動物を組み合わせて実験を始めたが，西洋で成功しなかった研究であり，東京帝大の学生は熱心には取り組まなかったようである．

実験が新展開を見せるようになるのは，大正2年に，東北帝大農科大学（のちの北海道帝大農学部）の畜産学科を卒業した市川厚一（1888–1948）が実験を担当するようになってからのことである．動物としてはウサギが，刺激としてはコールタールの塗擦（単に塗るのではなく擦るのでこの語が使われた）が選択され，動物の扱いに慣れた市川が，山極に忠実に実験を継続するようになった．また，同年には，デンマークのフィビゲル（Johannes Andreas Grib Fibiger, 1867–1928）が，ゴキブリを食べたネズミの胃の中で，ゴキブリを中間宿主とする寄生虫が癌を起こすことを発見し，ウィルヒョウの刺激説の有力な例証を与えたと理解された．山極らは自身の路線の正しさが示されたと考えた．

市川の実験は大正3年（1914年）4月から始まり，途中ウサギが寄生虫で大量に死ぬなどの事態も経ながら，大正4年9月の東京医学会で発表を行うまでに，少なくとも3例において腫瘍の癌化が確認された．癌発生には，従来の実験よりも長い，100日から180日が必要であったが，市川はこれを上回る期間，実験を継続していた．これらは上皮癌であったが，大正8年（1919年）の第9回日本病理学会総会では，市川は，ウサギの乳腺にアデノカンクロイドを発生させたことを報告している．

山極・市川の研究は大正8年に学士院賞を受賞し，昭和3年（1928年）には山極がドイツのノルトホフ–ユング賞を受賞した．人工癌の形成は国内外で高く評価された．

12.5 山極とノーベル賞

山極は，大正14年（1925年）に東京帝大医学部のかつての同僚たちによってノーベル賞に推薦され，ついで翌年にはフライブルクの著名な病理学教授アショフ（Ludwig Aschoff, 1866–1942）によっても推薦された．アショフは2種類の提案をしているが，山極の名前は，フィビゲルとの共同受賞の候補として挙げられており，特に山極が具体的な化学物質の刺激で癌を発生させた点が評価されている[22]．

アショフの推薦を受け，1926年，山極はフィビゲルとともに評価対象となり，ノーベル賞委員会の依頼を受けて，ヘンシェン（Folke Henschen, 1881–1977），およびベリストランド（Karl Johan Hilding Bergstrand, 1886–1967）が報告書を提出した．ヘンシェンは癌研究の進展状況からみて，両者に賞を与えることに躊躇する理由はないと述べているが，ベリストランドは両者の研究の将来的な意義は大きくないと看做した．委員会では癌研究は重視されず，バクテリオファージの発見により，1925年の受賞者候補（委員会の推薦をカロリンスカ研究所教授会が否決して決定が延期されていた）はデレル（Félix Hubert d'Herelle, 1873–1949）とし，1926年分は翌年に延期するという結果が報告された．ところが，教授会は，前年に続いて，委員会による推薦を否決した．

2年続いて委員会の推薦が否決されるという事態を受けて，1926年秋には，デレルに関する意見書が4通，およびフィビゲルと山極に関する意見書1通（10月16日付）が集められた．後者を執筆したのはヘンシェンである（デレルに関しても意見書を提出している）．

ヘンシェンの二つ目の意見書は，短いながらも，以後の経緯において決定的な役割を果たした．2年続いて委員会の推薦が否決されたためか，ヘンシェンは，癌研究における候補をフィビゲル1人に絞っており，山極の業績の意義は認めながらも，先に行われたフィビゲルの業績が学説を確定したことを強調した．以後，候補として山極に言及する文章は選考の過程から消えることとなった．

翌1927年，フィビゲルは1926年の賞の受賞者となった．この年の選考の過程では，山極・市川の研究は，候補としてではなく，フィビゲルの業績との比較の対象としてのみ取り上げられ，特にヘンシェンは，彼ら自身が論文の中で「フィビゲルの輝かしい業績に励まされて」[23]研究を継続したと述べていると指摘して，フィビゲルのみに授賞することの正当性を主張した．

山極が死去し，ノーベル賞受賞が完全になくなった1930年代には，人工癌の形成という大きな業績が受賞しなかったのは，山極が日本人，有色人種であったからであるとの評が，日本の医学界では信じられるようになった．1952年になって，フィビゲルの受賞業績が誤りであったことが明らかになると，この憶測にはさらに劇的な色合いを帯びるようになった．1966年にはヘンシェンが来日し，フィビゲルと山極の両者を推薦した旨を述べたが，自身が最終段階で山極の名前を候補から外した点には言及せず，山極が受賞しなかった経緯は明らかにならなかった[24]．山極の業績は，戦前期の日本人が挙げたものとしては最大級であったが，ノーベル賞に関連しては，こうして不幸な印象を残すこととなった．

今回は第一次大戦前後までに日本の医学者たちが挙げた業績を瞥見し，ノーベル賞の選考過程における評価を見た．次回は，第一次大戦後に注目し，戦勝国の科学者たちのドイツ人科学者の排斥とその影響，日本の学界の対応などを検討する．

参考文献

1) 岡本拓司，「ノーベル賞文書からみた日本の科学，1901年–1948年——物理学賞・化学賞——」，『科学技術史』，**3** 号，1999年，87–128ページ；同，「ノーベル賞文書からみた日本の科学，1901年–1948年——北里柴三郎から山極勝三郎まで——」，『科学技術史』，**4** 号，2000年，1–65ページ．
2) Behring und Kitasato, “Ueber das Zustandekommen der Diphtherie-Immunität und der Tetanus-Immunität bei Thieren,” *Deutsche Medizinische Wochenschrift*, **16** (1890), pp.1113–1114.
3) Behring, “Untersuchungen über das Zustandekommen der Diphterie-Immunität bei Thieren,” *Deutsche Medizinische Wochenschrift*, **16** (1890), pp.1145–1148; Kitasato, “Experimentelle Untersuchungen über das Tetanusgift,” *Zeitschrift für Hygiene*, **10** (1891), pp.267–305; and, Kitasato, “Heilversuche an Tetanuskranken Thieren,” *Zeitschrift für Hygiene*, **8** (1892), pp.256–260.
4) 特集「日本細菌学の父　北里柴三郎」，『東京人』，**313** 号，2012年，7月増刊，9ページ．
5) 土本寛二・大久保美穂子監修『北里柴三郎博士の学問・研究への情熱』，北里研究所北里柴三郎記念室，2012年，36–43ページ．
6) J.A. Lowson, “The Plague at Hong-Kong,” *Lancet*, **144** (1894), p.325; S. Kitasato, “The Bacillus of Bubonic Plague,” *Lancet*, **144** (1894), pp.428–430.
7) A. Yersin, “La peste bubonique à Hong-Kong,” *Annales de l'Institut Pasteur*, **8** (1894), pp.662–667.
8) T. Aoyama, “Ueber die Pestepidemie in Hong-kong im Jahre 1894,” *Mittheilungen aus der Medizinischen Facultät der Kaiserlich-Japanischen Universität zu Tokio*, **3** (1897), pp.115–238.
9) 矢部辰三郎，「「ペスト」検疫方針ヲ論ス」，『東京医事新誌』，**1123** 号，1899年10月14日，25–27ページ．
10) 藤野恒三郎，『藤野・日本細菌学史』，近代出版，1984年，211–253ページ．
11) Franz Luttenberger, “Excellence and Chance: The Nobel Prize Case of E. von Behring and É. Roux,” *History and Philosophy of the Life Sciences*, **18** (1996), pp.225–238, p.236.
12) Luttenberger, op. cit.,11), “Excellence and Chance,” p.232.
13) Derek S. Linton, *Emil von Behring: Infectious Disease, Immunology, Serum Therapy* (Philadelphia: American Philosophical Society, 2005), pp.236–241.
14) Luttenberger, op. cit.,11), “Excellence and Chance,” pp.232–233.
15) 黒坂周平・石川好・嶋村冨郎，『郷土の人物　山極勝三郎博士』，上田市立博物館，1980年；伊東誠太郎，「日本の初期癌研究　山極勝三郎を中心に」，東京大学教養学部基礎科学科科学史科学哲学分科卒業論文，平成12年度，2001年．
16) 山極勝三郎，『胃癌発生論』，半田屋，1905年．
17) 伊東，前掲[15]，「日本の初期癌研究　山極勝三郎を中心に」，14–15ページ．
18) 青山胤通，「開会ノ辞（速記）」，『癌研究会会報』（『癌』**2** 巻1冊，1908年4月，に添付），285–286ページ．
19) 長岡半太郎，「欧州物理学実験場巡覧記」，『東京物理学校雑誌』，**21** 巻，1911年，79–83ページ．
20) 夏目漱石，『それから』，新潮文庫，2010年，102–103ページ．
21) 中原和郎『癌』，岩波新書，1955年，78–79ページ．
22) 岡本，前掲[1]，「ノーベル賞文書からみた日本の科学，1901年–1948年——北里柴三郎から山極勝三郎まで——」，34–55ページ．
23) K. Yamagiwa, “Über die künstliche Erzeugung von Teer-carcinoma und –sarcoma,” *Virchows Archiv*, **233** (1921), pp.235–259, p.236.
24) Folke Henschen, “Yamagiwa's Tar Cancer and Its Historical Significance—From Percival Pott to Katsusaburo Yamagiwa—,” *GANN*, **59** (1968), pp.447–451.

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第3回

関数とベクトル場(1)

森田 茂之

前回までに，多変数関数の微分と積分について復習してきた．今回から連載の本論に入る．まず $\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数の変化の仕方を微分を用いて考察する．そして関数の増減の具合を具体的に表すものとして，勾配ベクトル場と呼ばれるものを導入する．それは，関数が定義されている各点において，言わば関数の“速度ベクトル”を配置したものである．さらに，勾配ベクトル場の考えを参考にして，一般のベクトル場の概念を定義する．とくに xy 平面 $\mathbb{R}^2$ や xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ の場合について詳しく述べる．

3.1 関数の勾配ベクトル場

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級の関数

$$f : U \to \mathbb{R}$$

が与えられたとしよう．f の変化の具合を調べたい．そのために各実数 $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$L_f(r) = \{\boldsymbol{x} \in U; f(\boldsymbol{x}) = r\}$$

により定義される集合を考える．それは f の値がちょうど r となる点全体からなる U の部分集合である．ここでは，$L_f(r)$ を f の等位集合と呼ぶことにする．例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy$ の場合には，前回ですでに述べたように

$$L_f(r) = \begin{cases} 第\ 1,3\ 象限の直角双曲線\ xy = r & (r > 0), \\ x\ 軸 \cup y\ 軸 & (r = 0), \\ 第\ 2,4\ 象限の直角双曲線\ xy = r & (r < 0) \end{cases}$$

となる．

さて f の増減の具合を調べよう．簡単のために $n=3$ として記述するが，一般次元で通用する議論である．$\mathbb{R}^3$ の点は，幾何学的に $P \in \mathbb{R}^3$ と表したり，また座標を使って $P(x,y,z)$ あるいは 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ と，目的に応じて記法を使い分けることにする．U 上の点 P_0 において $f(P_0)=r$ とする．このとき $P_0 \in L_f(r)$ である．P_0 において 3 つの偏微分係数 f_x, f_y, f_z のどれかは 0 でない，すなわち

$$f_x^2(P_0)+f_y^2(P_0)+f_z^2(P_0) \neq 0$$

と仮定する．ここで**陰関数の定理**（theorem of implicit function）（後の節で復習する）を適用すれば，P_0 の近くで $L_f(r)$ は滑らかな曲面となることが次のようにして分かる．方程式 $f(x,y,z)=r$ は，本来自由に動くことのできた 3 変数 x,y,z に一つの制約を与えている．もし上記の仮定が満たされていて，例えば $f_z(P_0) \neq 0$ とすれば，P_0 の近くで x,y は自由に動けるが，z はそれらにより定まってしまうのである．すなわち x,y を変数とする関数 $h(x,y)$ が存在して，P_0 の近くで $z=h(x,y)$ となる．このような h を元の関数 f の陰関数と呼ぶのである．このとき，等位集合 $L_f(r)$ は P_0 の近くでは h のグラフ Γ_h の形をすることになる．すなわち P_0 の $\mathbb{R}^3$ におけるある開近傍 V が存在して

$$L_f(r) \cap V = \{(x,y,h(x,y)) \in V \subset \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in h(x,y) \text{ の定義域}\}$$

と書ける．従って $L_f(r)$ は P_0 の近くでは滑らかな曲面となり，P における $L_f(r)$ への接平面 T_{P_0} が存在する．

上記のことから，P_0 の近くで空間は $L_f(r)$ により 2 つの部分に分けられることが分かった．一方は $f>r$ の部分，すなわち f の値が r を超える部分であり，もう一方は $f<r$ の部分，すなわち f の値が r 未満の部分である．

> **例題 3.1**　上記の状況において，関数 f は接平面 T_{P_0} に直交する方向で最も大きく増加し，その最大の増加率は $\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}$ となることを証明せよ．

解答　P_0 における $L_f(r)$ への接平面 T_{P_0} に直交し，$f>r$ の方向を向いた長さ 1 の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_{P_0}$ としよう．

T_{P_0} の方程式は

$$f_x(P_0)(x-a)+f_y(P_0)(y-b)+f_z(P_0)(z-c)=0$$

で与えられる．ただし，$P_0(a,b,c)$ である．従って

$$\boldsymbol{n}_{P_0} = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \right)$$

となる．ただし，簡単のため $f_x(P_0)$ を単に f_x と記した．f_y, f_z も同様である．ここで，$\boldsymbol{n}_{P_0}$ と x 軸，y 軸，z 軸の正の方向との成す角度をそれぞれ α, β, γ とすれば，上記法線ベクトルの別の表示

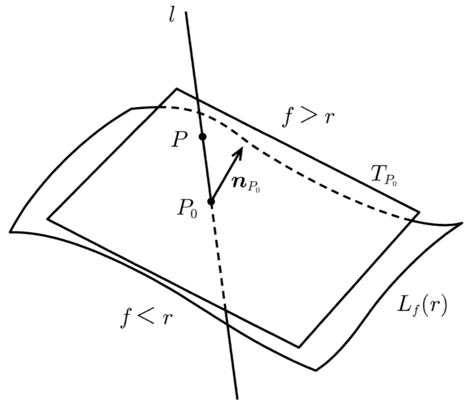


図3.1　T_{P_0} と $L_f(r)$.

$$\boldsymbol{n}_{P_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

が得られる．さて P_0 を通る任意の与えられた直線 l を取り（図 3.1 参照），関数 f の点 P_0 における l 上の変化率を計算しよう．そのために，l 上の点 $P(x, y, z)$ をパラメータ t を使って

$$x = a + t\cos\alpha',$$
$$y = b + t\cos\beta',$$
$$z = c + t\cos\gamma'$$

と表示する．ただし，（l が T_{P_0} 上にない場合には）t は $f > r$ の方向に増加するように取り，l には対応する向きを付けておく．そして α', β', γ' はそれぞれこのように向き付けられた l と x 軸，y 軸，z 軸の正の方向との成す角度を表すものとする．このとき，求める変化率は

$$\begin{aligned}
&\lim_{P\to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{d(P, P_0)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x, y, z) - f(a, b, c)}{t} \\
&= f_x\cos\alpha' + f_y\cos\beta' + f_z\cos\gamma' \\
&= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}\,(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \\
&= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}\,\cos\theta
\end{aligned}$$

となる．ここで，d は 2 点間の距離を表し，θ は $\boldsymbol{n}_{P_0}$ と l との成す角度を表す．この式から，f は $\theta = 0$ となるとき，すなわち T_{P_0} と直交する $\boldsymbol{n}_{P_0}$ の方向で最も大きく増加し，その増加率は $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$ であることが分かり，題意が示された．

上記のことを基にして，一般の多変数関数に対して次のように定義するのは自然であろう．$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対して，定義域上の各点 $P \in U$ において P を始点とする n 次元の幾何学的ベク

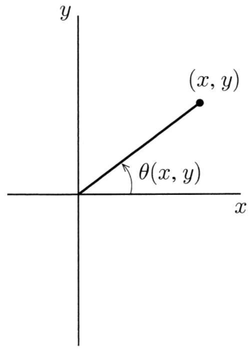


図 3.2　関数 $\theta(x,y)$.

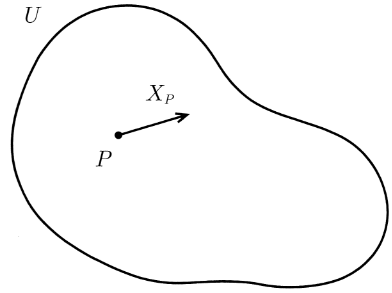


図 3.3　ベクトル場.

トル

$$X_P = (f_{x_1}(P), \cdots, f_{x_n}(P))$$

を対応させる．そしてこの対応 $U \ni P \mapsto X_P$ を f の**勾配**（gradient）と呼び，$\operatorname{grad} f$ と書く．これは次節で定義するベクトル場の重要な例となる．そこで**勾配ベクトル場**（gradient vector field）と言う場合もある．改めて定義を書くと

$$\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, \cdots, f_{x_n})$$

となる．

例題 3.2　平面上の点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で x 座標が正となるもの全体

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$$

を考える．U 上の実数値関数 $\theta : U \to \mathbb{R}$ を

$$\theta(x,y) = \text{平面ベクトル } (x,y) \text{ の偏角}$$

により定義する．ただし $-\frac{\pi}{2} < \theta(x,y) < \frac{\pi}{2}$ とする（図 3.2 参照）．このとき f の勾配ベクトル場 $\operatorname{grad}\theta$ を求めよ．

解答　関数 θ は，逆正接関数 $\operatorname{Arctan} x$ を使って，$\theta(x,y) = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$ と表すことができる．従って，逆正接関数の導関数の公式

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

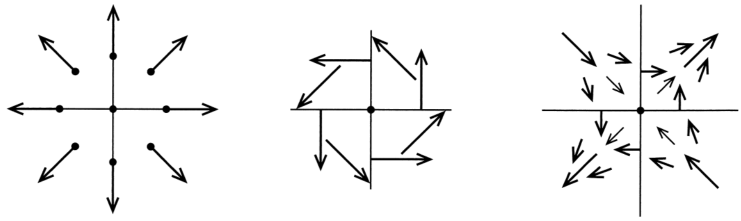
を使えば

$$\operatorname{grad}\theta = (\theta_x, \theta_y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

となる．

3.2 ベクトル場

この節では，一般の**ベクトル場**（vector field）の概念を導入する．前節で解



(i)　(ii)　(iii)

図 3.4　平面上のベクトル場の例.

説した関数の勾配ベクトル場は，その重要な一例である.

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. U 上の各点 $P \in U$ に対して，P を始点とするベクトル X_P が与えられているとき，対応

$$U \ni P \mapsto X_P : \text{点 } P \text{ におけるベクトル}$$

を U 上のベクトル場という（図 3.3 参照）. ベクトル X_P は n 次元のベクトルであるから，その第 i 成分を u_i $(i = 1, \cdots, n)$ とすれば

$$X = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

と表すことができる. ここで $u_i = u_i(x_1, \cdots, x_n)$ は P の座標 $P(x_1, \cdots, x_n)$ に関する n 変数の関数である. 言い換えると，ベクトル場とは n 個の関数を同時に考えたものと言える. u_i を X の第 i 成分という. u_i がすべて C^∞ 級であるとき，ベクトル場 X は C^∞ 級であると言う.

このように，ベクトル場とは各点においてそこにおけるベクトルを対応させるものである. これに対して，関数は各点において実数（あるいは場合によっては複素数）を対応させるものである. 一般に，実数や複素数等の数のことをベクトルに対比してスカラーと呼ぶ. そこで，ベクトル場に対比させて関数のことを**スカラー場**（scalar field）と言う場合がある.

例 3.1　平面上のベクトル場の簡単な例を 3 つ挙げる（図 3.4 参照）.

(i) $X(x, y) = (x, y)$

(ii) $X(x, y) = (-y, x)$

(iii) $X(x, y) = (y, x)$

例題 3.3　例題 3.2 の解答に出て来たベクトル場

$$X = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

は，平面から原点を除いた開集合 U_0 全体の上で定義される. このベクトル場を図示せよ. 次に，U_0 全体で定義された C^∞ 級関数 $h : U_0 \to \mathbb{R}$ で，$\operatorname{grad} h = X$ となるものは存在しないことを証明せよ.

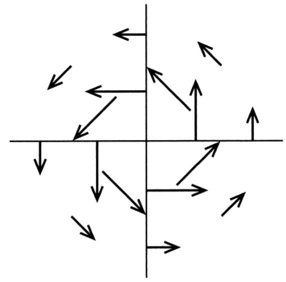


図 3.5　ベクトル場 X.

解答　まず，ベクトル場 X の各点 $(x,y) \in U_0$ における長さ $|X(x,y)|$ を計算しよう．各点の原点からの距離を r と書けば，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ であるから

$$|X| = \sqrt{\frac{y^2}{r^4} + \frac{x^2}{r^4}} = \frac{1}{r}$$

となる．次に，平面ベクトルとして見たとき，$r^2 X(x,y) = (-y, x)$ は各点の位置ベクトル (x,y) と直交し，後者から見たとき，正（時計と反対回り）の向きを指している．これらのことから X を図示すれば図 3.5 のようになる．

後半の主張を証明しよう．ベクトル場 X の単位円周 $S^1 = \{(x,y); x^2+y^2 = 1\}$ 上での振舞いを見てみよう．S^1 上では $X(x,y) = (-y,x)$ となり，これは例 3.1 (ii) のベクトル場を S^1 に制限したものと同じである．図 3.4 に示したように，このベクトル場の S^1 上の各点での値は，時計と反対方向を向いた長さ 1 の接ベクトルとなる．従ってもし $X = \operatorname{grad} h$ となる関数 h が存在したとすると，関数 h の値は S^1 上を時計と反対回りに動くとき単調に増加することになる．一方 h の値は S^1 を一周したとき，元の値に戻らなければならない．これは矛盾であり，証明が終わる．

3.3 陰関数の定理

3.1 節では陰関数の定理を使った．この定理は理論的にも実際の計算でも極めて重要な定理である．そこで，復習の意味も込めてこの節で幾何学的な視点からまとめておく．

$\mathbb{R}^n$ の点の通常の座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考える．$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された m 個の実数値関数

$$f_i : U \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

が与えられたとしよう．このとき

$$M = \{\boldsymbol{x} \in U; f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \cdots, f_m(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

は U 上の点であって，m 個の“束縛条件” $f_1 = 0, \cdots, f_m = 0$ を満たす点の全体のなす部分空間である．本来自由に動くことのできた n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ に m 個の束縛を与えるのであるから，ナイーブに考えれば変数の自由度は m

個減って $(n-m)$ 個となり，M は“$(n-m)$ 次元の図形”となることが期待される．しかし，m 個の束縛条件がすべて本質的に等しい場合や，$m=1$ で $f(\boldsymbol{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2+1$ の場合等の，自明な理由で上記の期待が成り立たない例を考えれば，何か条件が必要であることがすぐに分かる．一つの十分条件を与えるのが陰関数の定理である．

定理 3.1（陰関数の定理（幾何学的表現）） U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし

$$f : U \to \mathbb{R}^m$$

を m 次元に値をとる n 変数の C^∞ 級ベクトル値関数とする．ただし，$m<n$ と仮定する．ある点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in U$ において $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ となり，さらにその点における f の微分 $Df(\boldsymbol{a})$（それは $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である）のランクが最大，すなわち

$$\operatorname{rank} Df(\boldsymbol{a}) = m$$

であるとする．このとき，n 個の変数 $x_1,\cdots,x_n$ を，$(n-m)$ 個の変数 $\boldsymbol{x}_{(1)}=(x_{i_1},\cdots,x_{i_{n-m}})$ と残りの m 個の変数 $\boldsymbol{x}_{(2)}=(x_{j_1},\cdots,x_{j_m})$ に分けて，次のようにすることができる．

すなわち，$\boldsymbol{a}$ の近くの点 $\boldsymbol{x}$ で $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となる点の座標を，上記のグループ分けに従って $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_{(1)},\boldsymbol{x}_{(2)})$ と書いたとき，$\boldsymbol{x}_{(1)}$ は $\boldsymbol{a}_{(1)}=(a_{i_1},\cdots,a_{i_{n-m}})$ の近くを自由に動くことができるが，$\boldsymbol{x}_{(2)}$ は $\boldsymbol{x}_{(1)}$ の関数として一意的に定まる．言い換えれば，$\boldsymbol{x}_{(1)}$ を変数とする $\mathbb{R}^{n-m}$ の点 $\boldsymbol{a}_{(1)}$ のある近傍 W で定義され，$\boldsymbol{x}_{(2)}$ を変数とする $\mathbb{R}^m$ に値を取る C^∞ 級のベクトル値関数 $h : W \to \mathbb{R}^m$ が存在して，$\boldsymbol{a}$ の近くの点 $\boldsymbol{x}$ が $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ を満たすことと，$\boldsymbol{x}_{(2)}=h(\boldsymbol{x}_{(1)})$ となることは同値となるということである．このとき，変数の順序を適当に入れ替えれば $f(\boldsymbol{x}_{(1)},h(\boldsymbol{x}_{(1)}))=\boldsymbol{0}$ となる．

補足説明　上記のように定まる関数 h を f の陰関数と言う．このとき図形 $M=\{\boldsymbol{x}\in U; f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ は点 $\boldsymbol{a}$ の近くで h のグラフ

$$\Gamma_h = \{(\boldsymbol{x}_{(1)},h(\boldsymbol{x}_{(1)}))\in\mathbb{R}^n; \boldsymbol{x}_{(1)}\in W\}$$

の形をしている．すなわち，点 $\boldsymbol{a}$ の $\mathbb{R}^n$ におけるある開近傍 V が存在して

$$M\cap V = \Gamma_h$$

となる．従って，$M\cap V$ 上の任意の点は $(n-m)$ 個の自由変数 $\boldsymbol{x}_{(1)}=(x_{i_1},\cdots,x_{i_{n-m}})$ によりパラメータ表示することができることになる．図 3.6 を参照してほしい．M 上の任意の点で上記の条件が満たされるとき，M は大局的に“良い形”をしていることになる．このような M は，$\mathbb{R}^n$ の $(n-m)$ 次元の“部分多様体”と呼ばれる構造を持つ．簡単な例として $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})=x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2-1$ がある．対応する部分多様体 $S^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}; x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$ を n 次元球面と称する．

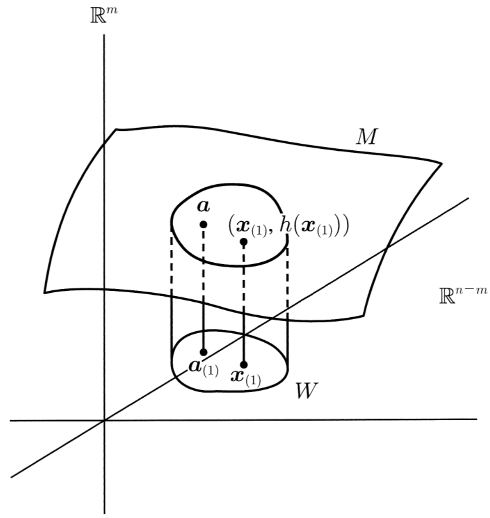


図 3.6　部分多様体.

前回復習したように，関数 f の微分 $Df(\boldsymbol{a})$ は f の成分 $f = (f_1, \cdots, f_m)$ の偏微分係数を成分とするヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

により具体的に表される．もし $Df(\boldsymbol{a})$ のランクが m ならば，n 変数の中からある m 個 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_m}$ を選んで正方行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_k}}(\boldsymbol{a})\right)_{i,k=1,\ldots,m}$$

が正則となるようにできる．上記の定理の変数のグループ分けは，これにより定めることができる．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第22回

機械学習の情報幾何(3)

確率推論，グラフィカルモデル，信念伝播

甘 利 俊 一

確率的な事象を扱う問題は多い．確率変数の間の関係をグラフで表したものがグラフィカルモデルである．このモデルで，いくつかの確率変数が観測されたときに，観測されていない変数の値を確率に基づいて推論するのが確率推論である．今回は確率推論に用いる信念伝播法の情報幾何を述べよう[1]．確率推論においては，各変数は周りの状況を見ながら，自分の値についてこう思うという'信念'を構成する．自分の信念を枝でつながっている周囲の変数に伝播する一方，周囲の変数が発する信念を受けとり，グラフの確率構造と全体が調和するように信念を変更していく．結果として，全員で一致した解を構成する手法である．

22.1 確率のグラフィカルモデル

n 個の確率変数 $x_1, \cdots, x_n$ があり，これらは互いに関連しているとしよう．つまり，一つの変数 x_i は，他のいくつかの変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ の影響を受けて確率的に決まるとする．このとき，変数 $X_i = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ を x_i の親変数という．親子関係をグラフで表そう．各変数を頂点で表し，x_j が x_i の親であるときに，x_j から出て x_i へ至る枝を付けると，グラフができ上がる．これが，確率構造のグラフ表現である（図 22.1）．グラフには枝に向きを付けた有向グラフと向きを付けずに両方向につながる無向グラフがある．

頂点 x_i の確率分布は親の変数の値に依存するから，条件付き確率 $p(x_i|X_i)$ で表すことができる．このとき，全体の変数の同時確率分布は

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|X_i) \qquad (22.1)$$

のように条件付き確率の積の形で表される[2,3]．

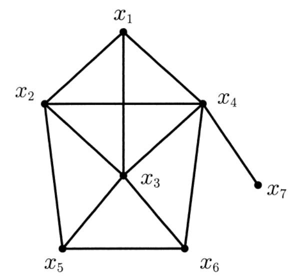


図 22.1　グラフィカルモデル．

このような確率構造はランダム確率場とも呼ばれ，確率的な因果関係を表すマルコフ連鎖を拡張したものである．ベイズネットワークも同じものである．このとき，グラフの頂点の部分集合で，極大の完全グラフをなすもの（すなわち完全グラフの一部分ではないもの）を，クリークと呼ぶ．完全グラフとは，その頂点どうしをつなぐ枝がすべて存在するグラフのことである．図 22.1 でいえば，$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_7\}, \{x_3, x_5, x_6\}$ などはクリークをなすが，$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3\}$ などはそうではない．このとき，L 個のクリークがあったとし，X_r, $r = 1, 2, \cdots, L$, をクリークの確率変数の集まりとする．すると，全体の確率分布は 1 変数の関数 $\phi_i(x_i), i = 1, \cdots, n$, とクリークに対応する関数 $\phi_r(X_r), r = 1, \cdots, L$, を用いて

$$p(x_1, \cdots, x_n) = c \prod \phi_i(x_i)\, \phi_r(X_r) \tag{22.2}$$

のように分解できることが知られている[2,3]．c は規格化定数である．

いま，確率変数の全体が $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_k\}$ の 2 種類から成り，変数 $y_1, \cdots, y_k$ の値は観測できたとしよう．それを基に観測されない $x_1, \cdots, x_n$ の値が何であるかを推測したい．これが確率推論である．推論は，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ についての条件付き確率

$$p(\boldsymbol{x}|Y) \tag{22.3}$$

に基づいて行う．ただし観測された $Y = \{y_1, \cdots, y_k\}$ の値は以後は固定したものとし，条件付き確率 $p(\boldsymbol{x}|Y)$ を簡単のため単に $q(\boldsymbol{x})$ と表す．ここで未知の $\boldsymbol{x}$ の値についての推論を行う．簡単のため，各変数 x_i は 1 か -1 の 2 値を取るものとする．

$q(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}|Y)$ の値を最大にする $x_1, \cdots, x_n$ の組が最尤推定であるが，これは一般に計算量が大きい組合せ問題になる．ここでは，各 x_i について，それが 1 である確率と -1 である確率を比較して，大きいほうの値を割り当てる．すなわち，x_i の期待値

$$\eta_i = E[x_i] = \mathrm{Prob}\{x_i > 0\} - \mathrm{Prob}\{x_i < 0\} \tag{22.4}$$

を計算し，これが正なら $x_i = 1$，負なら $x_i = -1$ とする推定，すなわち $\hat{x}_i = \mathrm{sgn}(\eta_i)$ を採用する．こうすれば，$\hat{x}_i$ が正解を与える確率は誤る確率よりも常に大きい．だからこの方式は，各変数の誤り率の和を最小にする推定といえる．

こうなると，問題はグラフ構造が与えられ，(22.2) の形で表された $q(\boldsymbol{x})$ に

おいて，各変数 x_i の期待値

$$\eta_i = E[x_i] = \sum_{\boldsymbol{x}} x_i q(\boldsymbol{x}) \tag{22.5}$$

を求めることに帰着する．これは簡単そうで実は大変な計算が必要である．定義通りに

$$\eta_i = E[x_i] = \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} x_i q(x_1, \cdots, x_n) \tag{22.6}$$

を計算するには $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のすべての組合せに対して $q(\boldsymbol{x})$ を足さなくてはならない．これは 2^n 個の項を含むから，n が大きいときはとてもやりきれない．そこで，何かうまい計算法を考えることになる．

確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ が (22.2) の形をしているなら，それは

$$q(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\sum h_i x_i + \sum_r c_r(\boldsymbol{x}) - \psi\right\} \tag{22.7}$$

のように表せる．ここで指数の中身を見よう．クリークに番号を付け，r 番目のクリークを C_r で表す．これが確率変数 $X_r = \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_s}\}$ よりなれば，

$$c_r(\boldsymbol{x}) = \log \phi_r(x_{r_1}, \cdots, x_{r_s}) \tag{22.8}$$

である．ψ は規格化定数であり，

$$h_i = \frac{1}{2} \log \frac{\phi_i(x_i = 1)}{\phi_i(x_i = -1)}. \tag{22.9}$$

確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ から，その変数の期待値 $\boldsymbol{\eta} = E[\boldsymbol{x}]$ を求めるのに，物理学では平均場近似という手法を開発した[4]．それを述べる前に幾何学的な枠組みを明らかにしておこう．

22.2 期待値と分布の射影

ここで考察する確率分布は (22.7) である．しかし，これを拡張し，各クリークに対応する新しいパラメータ $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_L)$ を導入し，

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} + \sum v_r \phi_r(X_r) - \psi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})\right\} \tag{22.10}$$

のような確率分布の族 $\tilde{M}$ を考える（図 22.2）．これは指数型分布族であり，$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{v}$ が自然パラメータである．だからこれは $n + L$ 次元の双対平坦な空間をなしている．ここで $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{1} = (1, \cdots, 1)$ とおけば，これは我々が対象としている確率分布 (22.7) の $q(\boldsymbol{x})$ である．また，$\boldsymbol{\theta}$ は自由とし，単に $\boldsymbol{v} = 0$ とおけば，独立な確率分布の集まりである．この族は，クリークによる高次の相互作用を $\boldsymbol{v}$ の値に応じて強めたり弱めたりしたもので，$\boldsymbol{v} = 0$ ならば相互作用がなく，独立の分布になる．

独立な分布の集まりは，この空間の部分空間である．これを

$$M_0 = \{p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta})\}\} \tag{22.11}$$

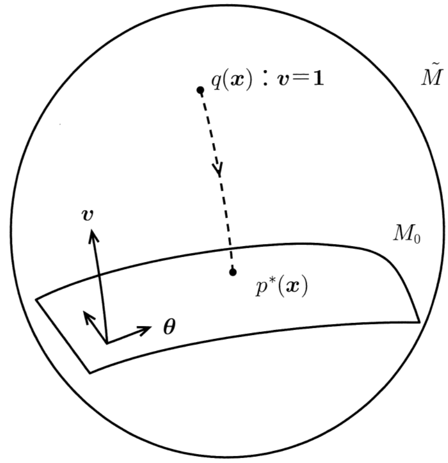


図 22.2　拡大したモデル $\tilde{M}$ と $q(\boldsymbol{x})$ の M_0 への m 射影.

とおこう．独立の分布ならば，$\boldsymbol{x}$ の期待値は各成分毎に別々に計算すればよく，

$$\eta_i = E\left[x_i\right] = \frac{e^{\theta_i} - e^{-\theta_i}}{e^{\theta_i} + e^{-\theta_i}} = \tanh\left(\theta_i\right) \tag{22.12}$$

である．

独立な分布で $q(\boldsymbol{x})$ と同じ平均値を持つものを考えよう．これを求めるために q を M_0 に m 射影してみよう．この射影を $\Pi_0 q$ とすれば，これは q と $\Pi_0 q \in M_0$ を結ぶ m 測地線が M_0 と直交する点である．しかも，これは q から M_0 への KL ダイバージェンスを最小にする点でもある（図 22.2），

$$\Pi_0 q = \mathop{\arg\min}_{p \in M_0} KL[q : p] \tag{22.13}$$

このとき，次の定理が成立する．

定理 22.1　m 射影は各変数 x_i の期待値を変えない．

証明　q の M_0 への m 射影を $p^* = \Pi_0 q$ とおく．p^* は M_0 に属する．p^* 点における M_0 の接ベクトルは，$\boldsymbol{\eta}^* = E[\boldsymbol{x}]$ として (22.11) を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}^* \tag{22.14}$$

である．$\boldsymbol{\theta}^*$ は p^* の $\boldsymbol{\theta}$ 座標である．一方，q と p^* とを結ぶ m 測地線の接ベクトルは，

$$t(\boldsymbol{x}) = \frac{q(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{x})}{p^*(\boldsymbol{x})} \tag{22.15}$$

である．この 2 つが直交するから

$$\langle t(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}^* \rangle = \sum \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}^*\right) \left\{q(\boldsymbol{x}) - p^*(\boldsymbol{x})\right\} = 0, \tag{22.16}$$

これより

$$E_q[\boldsymbol{x}] = E_{p^*}[\boldsymbol{x}] \tag{22.17}$$

が成立する．

$\boldsymbol{x}$ の期待値を求めるには，m 射影を実行すればよい．しかし，この計算は容易でなく，近似でよいから簡単な計算法が必要である．統計物理学は平均場近似という手法を編み出した．話を簡単にするために，統計物理学で良く用いられる，2 次の相互作用のみを含む分布

$$q(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x} + \sum w_{ij}x_ix_j - \psi(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{W})\right\} \tag{22.18}$$

を考える．これはスピンのモデルであるが，神経回路の工学モデルでは Boltzmann 機械として知られている．ここでは，クリークは各枝に対応する変数の対 $X_r = (x_i, x_j)$ である．

$\boldsymbol{x}$ の期待値を求めるには，q から M_0 への m 射影，すなわち q から M_0 への KL ダイバージェンス $KL\,[q : M_0]$ を最小にする点を求めればよかった．M_0 が e 平坦であるから，これは一意に決まる．しかし，計算が容易でない．そこで，KL ダイバージェンスを逆にして，$KL\,[M_0 : q]$ を最小にする分布 $\hat{p} \in M_0$ を求めてみよう．これは q から M_0 への e 射影である[5]．この計算は次のようにすればよい．まず，$KL[p : q]$ を計算する．

$$\begin{aligned} &KL\,[p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) : q(\boldsymbol{x})] \\ &= E_p\left[(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \psi_{\boldsymbol{\theta}}) - \left(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x} + \sum w_{ij}x_ix_j - \psi(\boldsymbol{h}, W)\right)\right]. \end{aligned} \tag{22.19}$$

ここで，$\boldsymbol{\eta} = E_{p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})}[\boldsymbol{x}]$ とおき，さらに $p(\boldsymbol{x})$ が独立分布であることを考慮すれば，$E_p\,[x_ix_j] = \eta_i\eta_j$ がわかる．したがって，上式の右辺は

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta} - \psi(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\eta} - \sum w_{ij}\eta_i\eta_j - \psi \tag{22.20}$$

となる．これを $\boldsymbol{\eta}$ で微分して，それを 0 とおく．

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta} - \psi(\boldsymbol{\theta})\} = \tanh^{-1}(\eta_i) \tag{22.21}$$

に注意すれば，$\Pi_0 q$ を与える η_i は

$$\eta_i = \tanh\left(\sum w_{ij}\eta_j + h_i\right) \tag{22.22}$$

の解である．この解は一意とは限らない．

残念なことにここから得た $\boldsymbol{x}$ の期待値は元のものとは違うから，これは近似である．さらに厄介なことに，M は e 平坦ではあるが m 平坦ではないために，e 射影は一意に決まるとは限らず，多数の解を持つことがあり，極大になってしまうこともある[6]．物理学では，平均場近似を改良するいろいろな試みが行われた．これから述べる人工知能分野から出た信念伝播法[7]も，その一つと考えてもよい．

22.3 信念伝播法

信念伝播法では，各クリーク C_r を一つずつ切り離して取り上げ，相互作用が一つしかないモデル

$$M_r = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_r) = \exp\{(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\xi}_r)\cdot\boldsymbol{x} + c_r(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{\xi}_r)\}\} \tag{22.23}$$

を考える．これはクリーク C_r に対して $v_r = 1$ と置き，他の $v_{r'}$ をすべて 0 と置いたモデルである．すると，このようなモデルがクリークの数 L だけできる．クリークが一つしかないのなら，そのモデルで $\boldsymbol{x}$ の期待値を求めることは簡単にできる．つまり M_r の点から M_0 への m 射影は困難なく行える．そこで，この L 個の部分モデル $M_1, \cdots, M_r$ が協調して，M_0 を道具として使って，$\boldsymbol{x}$ の期待値（の近似値）を求める方策である．

少し整理しておこう．まず，すべての分布に項 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}$ が入ってくるから，これを外して（$\boldsymbol{h} = 0$ と置くのと同じ）考え，あとでこの項を加えることにする．数学的にはすべての確率分布を共通の分布 $\exp\{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}\}$ に対する密度関数にすることである．このとき，目的の分布は

$$q(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\sum c_r(\boldsymbol{x}) - \psi\right\}, \tag{22.24}$$

クリーク C_r を 1 個含むモデル M_r は

$$M_r : p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r) = \exp\{\boldsymbol{\theta}_r\cdot\boldsymbol{x} + c_r(\boldsymbol{x}) - \psi_r(\boldsymbol{\theta}_r)\}, \tag{22.25}$$

独立な分布 M_0 は

$$M_0 : p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \psi_0(\boldsymbol{\theta})\} \tag{22.26}$$

と書ける．すべてが (22.10) 式の S の e 線形部分空間である．

モデル M_r は，1 個クリーク C_r だけを相互作用として持ち，他の相互作用はすべてまとめて線形項 $\boldsymbol{\theta}_r\cdot\boldsymbol{x}$ で近似したものになっている．すなわち，$\boldsymbol{\theta}_r$ は $c_r(\boldsymbol{x})$ 以外の $c_{r'}(\boldsymbol{x}), r' \neq r$, の和をまとめて線形近似したものといえる．一方，独立分布は，すべての相互作用を線形項 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}$ で置き換えている．

このとき，どの M_r における $\boldsymbol{x}$ の期待値も一致し，これが独立な分布 M_0 での期待値に等しければ，すべての部分モデルの言い分が相互に矛盾をきたさない．M_r の分布で期待値を取る演算を E_r と書けば

$$E_r[\boldsymbol{x}] = E_0[\boldsymbol{x}], \quad r = 1, \cdots, L \tag{22.27}$$

が成立するような協調した分布を各 M_r および M_0 で考えたい．この期待値が，真の分布 $q(\boldsymbol{x})$ での期待値と一致すればそれが本当の期待値であるが，もしだめでもそのよい近似を与えるようになればよい．

この理想を達成するために，次の手順を考える．

1. $t = 0$ で，$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_r = 0$ の初期値から出発する．

2. ステップ t での各モデルの値 $\boldsymbol{\theta}^t, \boldsymbol{\theta}_r^t$ を，次の手順で $\boldsymbol{\theta}^{t+1}$, $\boldsymbol{\theta}_r^{t+1}$ に更新する．

(a) M_r での分布 $p_r\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^t\right)$ を M_0 に m 射影する．このときの M_0 の $\boldsymbol{\theta}$ 座標を $\Pi_0 p_r$ と書く．このとき得られる M_0 の $\boldsymbol{\theta}$ 座標から，元々 M_r にあった線形項 $\boldsymbol{\theta}_r^t$ を引いたもの

$$\boldsymbol{\xi}_r^t = \Pi_0 p_r\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^t\right) - \boldsymbol{\theta}_r^t \tag{22.28}$$

は，M_r の相互作用項 $c_r(\boldsymbol{x})$ を M_0 に m 射影したものと考えてよい．

(b) $\boldsymbol{\xi}_r^t$ は，モデル M_r が発する，自分の非線形項 $c_r(\boldsymbol{x})$ を線形化すれば $\boldsymbol{\xi}_r^t$ になるという信念を表すものと見る．これをすべての r について加えた

$$\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \sum \boldsymbol{\xi}_r^t \tag{22.29}$$

は，各 M_r が持つ相互作用 $c_r(\boldsymbol{x})$ を M_0 に射影したものの和である．こうして各モデルの信念が統合されて $\boldsymbol{\theta}^{t+1}$ になった．モデル M_r は自分のは正しい $c_r(\boldsymbol{x})$ を使い，他の $c_{r'}(\boldsymbol{x})$, $r' \neq r$, については信念 $\boldsymbol{\xi}_{r'}^t$ を借用して新しい $\boldsymbol{\theta}_r^{t+1}$ を

$$\boldsymbol{\theta}_r^{t+1} = \boldsymbol{\theta}^{t+1} - \boldsymbol{\xi}_r^t = \sum_{r' \neq r} \boldsymbol{\xi}_{r'}^t \tag{22.30}$$

で作る．

これを繰り返すことによって，最後に $(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}_r^*)$ に収束したとしよう．このとき，(22.28) と (22.30) から

$$p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0^*\right) = \Pi_0 p_r\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^*\right) \tag{22.31}$$

が成立する．すなわち収束した M_r および M_0 の分布は，すべて m 射影で写り合い，同じ $\boldsymbol{x}$ の期待値を与える．

22.4 信念伝播法の収束先

信念伝播法の収束先はどこであろうか．

定理 22.2　アルゴリズムの収束先，$(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}_r^*)$ は，次の 2 つの条件を満たす．

$$m \text{ 条件}：p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*\right) = \Pi_0 p_r\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^*\right),$$

$$e \text{ 条件}：\boldsymbol{\theta}^* = \frac{1}{L-1}\sum \boldsymbol{\theta}_r^*.$$

証明　m 条件は，(22.28) と (22.30) から得られる．これは，アルゴリズムが収束したとき，各モデル M_0 と M_r での分布は互いに m 射影で写り合い，$\boldsymbol{x}$ の期待値が等しいことを言っている．一方，e 条件は (22.30) を (22.29) に代入して得られる．(22.29) からわかるように，更新の各段階で，これが成立するように $\boldsymbol{\theta}_r$ から新しい $\boldsymbol{\theta}$ を定める．

この 2 つの条件が意味するところを幾何学で見よう．それには，各モデルでの収束先の分布を結ぶ m 平坦な部分多様体（図 22.3）を

$$M^* = \left\{p(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, E_{p_0^*}[\boldsymbol{x}] = E_{p_r^*}[\boldsymbol{x}]\right\} \tag{22.32}$$

とする．また，これらの分布を結ぶ e 平坦な多様体（図 22.4）を

$$E^* = \left\{ \log p(\boldsymbol{x}) = t_0 \log p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*) + \sum t_r \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^*) \middle| \sum t_r = 1 \right\} \tag{22.33}$$

とする．このとき，両条件はそれぞれ

m **条件**：M^* は各部分モデル M_0 および M_r に直交する．

e **条件**：E^* は真の分布 $q(x)$ を含む．

と言い換えてよい．事実，収束先は

$$p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*) = \exp\left\{\sum \boldsymbol{\theta}_r^* \cdot \boldsymbol{x} - \psi_0\right\}, \tag{22.34}$$

$$p_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^*) = \exp\left\{\sum_{r' \neq r} \boldsymbol{\xi}_{r'}^* \cdot \boldsymbol{x} + c_r(\boldsymbol{x}) - \psi_r\right\} \tag{22.35}$$

と書け，

$$q(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\sum c_r(\boldsymbol{x}) - \psi_q\right\} \tag{22.36}$$

であるから，この命題が成立する．

M^* が q を含めば，q を m 射影したものが M_0 における $p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*)$ であるから，正しい答えが得られる．しかし，一般に，これは成立しない．ただ，次の事実が知られている．

定理 22.3　グラフが樹状のとき，すなわち閉路を持たなければ，M^* は q を含む．このとき，

$$\log q(x) = \sum \log p_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_r^*) - (L-1) \log p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*) \tag{22.37}$$

で，アルゴリズムは正しい答えを与える．

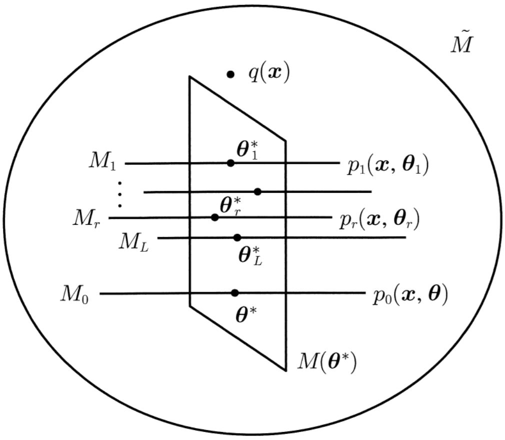


図 22.3　m 条件：$p_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_1^*), \cdots, p_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_L^*)$ と $p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*)$ は $M_1, \cdots, M_L, M_0$ に直交する同一 m 平坦空間 $M(\boldsymbol{\theta}^*)$ に含まれる．

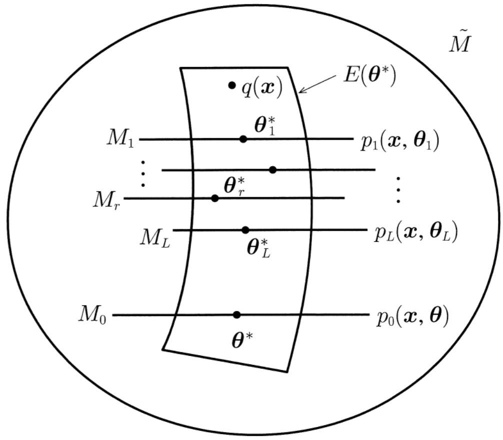


図 22.4　e 条件：$p_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^*), \cdots, p_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_L^*)$ の張る e 平坦空間 $E(\boldsymbol{\theta}^*)$ は $q(\boldsymbol{x})$ を含む．

信念伝播アルゴリズムは，情報幾何の立場から上のように見るのが本質を突いていて分かりやすいと思えるが，世の中はそうではない．元来の形のほうが分かりやすいと感じる人も多いので，ここで対応を記しておこう．簡単のため，クリークが2変数をつなぐ枝のみからなるものとする．このとき，アルゴリズムは点 x_i の信念 $b_i(x_i)$ と，点 x_i から x_j に枝 (i, j) を通して伝わるメッセージを $m_{ij}(x_j)$ とからなる．信念はメッセージから

$$b_i(x_i) = \frac{1}{Z}\phi_i(x_i) \prod_{k_i \in N(i)} m_{k_i}(x_i) \tag{22.38}$$

で作られる．ただし Z は規格化定数で，$N(i)$ は点 x_i に枝でつながっている隣接点の集合を指す．通常のBPアルゴリズムは，ステップ t でのメッセージを

$$m_{ij}^{t+1}(x_j) = \frac{1}{Z}\sum_{x_i} \phi_i(x_i)\phi_{ij}(x_i, x_j) \prod_{k_i \in N(i)-j} m_{k_i}^t(x_i) \tag{22.39}$$

により更新し，これにより新しい信念 b_i を計算する．

各量は，我々の言葉で書けば，次のような対応関係にある．

$$\theta_i = \frac{1}{2}\log \prod_{k_i \in N(i)} \frac{m_{k_i}(x_i = 1)}{m_{k_i}(x_i = -1)}, \tag{22.40}$$

$$\theta_{r,i} = \frac{1}{2}\log \prod_{k_i \in N(i)-j} \frac{m_{k_i}(x_i = 1)}{m_{k_i}(x_i = -1)}. \tag{22.41}$$

アルゴリズムとしては全く同じものであるから，どちらが分かり易いかは趣味の問題ともいえる．しかし，情報幾何を用いれば見通しが良く，理論的な解析も進むし，アルゴリズムの拡張が可能になる．

22.5 信念伝播法の新しいアルゴリズム凹凸法

BPアルゴリズムの計算は，最終的には m 条件と e 条件を満たす分布の組 $(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}_r^*)$ を求めることにあった．情報幾何によるアルゴリズムは実質的には通常のものと同じで，その解釈を明確にしただけともいえる．BPアルゴリズムは，(22.29) に見るように，各ステップで e 条件が満たされるように $\boldsymbol{\theta}_r$ の組を選びつつ，その上で m 条件を満たすようにこれらの値を m 射影で更新していく．それならば，各ステップでまず m 条件が満たされるような $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\theta}_r$ の組を選びつつ，その後で e 条件を満たすように変数を変えていく手法があってもいいはずである．情報幾何からはこのアルゴリズムが容易に導ける．

ここで，BPアルゴリズムとは逆に，各ステップで m 条件を満たしたままで，e 条件を満たすように変えるアルゴリズムを考えよう．これは次のように書ける．

任意の $\boldsymbol{\theta}^0$ を，$t = 0$ の初期値として M_0 に設定する．$t = 0, 1, 2, \cdots$ として，ステップ t での M_r の分布は M_0 の分布 $p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^t\right)$ を M_r に射影して決める．すなわち

1. M_0 の点 $\boldsymbol{\theta}^t$ を，各 M_r に m 射影し，得られる点を

$$\Pi_{M_r} p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^t\right) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}_r^t \cdot \boldsymbol{x} + c_r(\boldsymbol{x}) - \psi_r\right\} \tag{22.42}$$

として，この $\boldsymbol{\theta}_r^t$ を用いる．これを $\boldsymbol{\theta}_r^t = \Pi_{M_r} p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^t\right) - c_r(\boldsymbol{x})$ と書こう．

2. 各 M_r での $\boldsymbol{\theta}_r^t$ を統合し，次のステップの M_0 での $\boldsymbol{\theta}$ の値を

$$\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \sum_r \left(\boldsymbol{\theta}^t - \boldsymbol{\theta}_r^t\right) = L\boldsymbol{\theta}^t - \sum_r \boldsymbol{\theta}_r^t \tag{22.43}$$

に更新する．

同種のアルゴリズムが，全く別の考えで提案された．Yuille らの CCCP (Convex-Concave Computational Procedure) である[8,9]．若い人は CCCP といっても何も連想しないだろうが，年寄りはこれをロシア語読みしてエスエスエスエル，つまりソ連邦のことと感ずるのが面白い．上記の情報幾何による方法は，以下に述べる CCCP を簡略化し計算の手間を省いたものになっている．

信念伝播法については，物理学との関連でも解釈できて，これがベーテ自由エネルギー $F\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_L\right)$ のような関数の極値を求めることになることが示されている[10]．しかし，これは凸関数ではないため，アルゴリズムは収束するとは限らない．そこで，F を 2 つの凸関数の差に分解する，すなわち凸関数と凹関数の和に分解するのが Yuille らのアイデアである．一般に変数 $\boldsymbol{z}$ の関数 $F(\boldsymbol{z})$ は凸関数と凹関数を用いて

$$F(\boldsymbol{z}) = F_{\text{convex}}(\boldsymbol{z}) + F_{\text{concave}}(\boldsymbol{z}) \tag{22.44}$$

のような分解がいつも可能である（一意ではない）．このとき，ステップ t での $\boldsymbol{z}$ の値 $\boldsymbol{z}^t$ を

$$\nabla E_{\text{convex}}\left(\boldsymbol{z}^{t+1}\right) = -\nabla E_{\text{concave}}\left(\boldsymbol{z}^t\right) \tag{22.45}$$

により更新するのが CCCP アルゴリズムである．これは F の極値に常に収束する．Yuille らは，これをグラフィカルモデルに適用し，BP とは別のアルゴリズムを導いた．こちらは BP とは違い，常に収束するし，収束先は BP の答えと同じである．しかし，収束の条件がこちらのほうがよいといわれている．

このアルゴリズムは，我々の 1 の段階で 1 ステップ先の $\boldsymbol{\theta}$ を用いることにし，$\boldsymbol{\theta}_r^t$ を求めるのに 2 の段階で得られる $\boldsymbol{\theta}^{t+1}$ を使う次のアルゴリズムになっている：

1. $\boldsymbol{\theta}_r^{t+1} = \Pi_{M_r} p_0\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}^{t+1}\right)$.
2. $\boldsymbol{\theta}^{t+1} = L\boldsymbol{\theta}^t - \sum \boldsymbol{\theta}_r^{t+1}$.

このとき，$\boldsymbol{\theta}_r^{t+1}$ は $\boldsymbol{\theta}^{t+1}$ の関数であるから，これを解くには上記の 1, 2 で表された非線形の方程式を 1 ステップ毎に解かねばならない．そのための繰り返しループが必要である．これが内部ループで，1 ステップ毎に内部ループを回して収束した答えを求める．これがすむと，あらためて 1, 2 を繰り返す．これを

外部ループという．このように，更新に 2 つのループを回すため，更新に計算量が多く必要になる．

CCCP はこの複雑な 2 重ループを回すアルゴリズムであった．しかし，情報幾何で見れば，我々のアルゴリズムで解いても答えは同じである．ただ，両アルゴリズムでは収束域が違い，元のほうが良い場合が多いといわれている．

情報幾何では，この他いろいろな加速法や，誤差の解析，さらにアルゴリズムの収束条件と安定性などが議論できるが，詳細は文献 1) に譲る．

終わりの一言

グラフィカルモデルにおける確率推論の手法として信念伝播法が登場し，機械学習の有力な道具となった．信念伝播法は誤り訂正符号（LDPC 符号）の復号化にも使われ，携帯電話などで役に立っている[11)]．これを情報幾何の観点で眺めると，話の見通しが良くなるだけでなく，性能の解析ができる．それだけでなく，その構造がわかるので，さらに新しいアルゴリズムを出せる．

30 年以上も昔，情報幾何で精力的に活躍していたデンマークの S. Lauritzen 教授が，グラフィカルモデルが面白い，研究の主題を情報幾何からこちらに移すと述べて，情報幾何から去っていった．彼はその後グラフィカルモデルで指導的な活躍を果たしてきた．これを残念に思ったのだが，なんと世の中はつながっていて，情報幾何とグラフィカルモデルが遭遇することになったのである．

参考文献

1) S. Ikeda, T. Tanaka and S. Amari, Stochastic reasoning, free energy, and information geometery, *Neural Computation*, **16**, 1779–1810, 2004.

2) S. Lauritzen, *Graphical Models*. Oxford University Press, 1996.

3) M.J. Wainwright and M.I. Jordan, Graphical models, exponential families, and variational inference, *Foundations and Trends in Machine Learning*, **1**, 1–305, 2008.

4) M. Opper and D. Saad (eds.), *Advanced Mean Field Methods: Theory and Practice*. MIT Press, 2001.

5) T. Tanaka, Information geometry of mean field approximation, *Neural Computation*, **12**, 1951–1968, 2000.

6) S. Amari, S. Ikeda and H. Shimokawa, Information geometry of α-projection in mean field approximation. In M. Opper and D. Saad (eds.), *Advanced Mean Field Methods: Theory and Practice*, 241–257. MIT Press, 2001.

7) J. Pearl, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*. Morgan Kaufmann, 1988.

8) A. Yuille, CCCP algorithms to minimize the Bethe and Kikuchi free energies: Convergent alternatives to belief propagation, *Neural Computation*, **14**, 1691–1722, 2002.

9) A.L. Yuille and A. Rangarajan, The concave-convex procedure. *Neural Computation*, **15**, 915–936, 2003.

10) J.S. Yedidia, W.T. Freeman and Y. Weiss, Generalized belief propagation. In T.K. Leen, T.G. Dietrich and V. Tresp (eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, **13**, 689–695, MIT Press, 2001.

11) S. Ikeda, T. Tanaka and S. Amari, Information Geometry of Turbo and Low-Density Parity-Check Codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.**50**, No.6, pp.1097–1114, 2004.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2013 年 6 月号予告）

発展する統計力学

導き出される新たな世界像

本体 952 円

編集後記

物理に限らず，その分野・場面特有の「作法」があるかと思います．それは実際にやってみて理解できるものも多いように思います．

今回の特集で取り上げた「次元の作法」もそのようなものの一つなのかもしれません．（R）

＊　＊

学生のときの物理の試験，少ない残り時間で選択問題と向き合っていました．ふと選択肢の次元や単位を調べてみると，明らかに違うものを見つけられ，そのおかげか合格点がもらえました．

その経験もあって，本特集の解説にある次元の重要性に強く共感しました．（T）

数　理　科　学　5月号

2013 年 5 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 木 下 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁